1차 논리와 괴델의 완전성 정리

최승락

‘논리적인 글쓰기’, ‘논리적 사고’ 그리고 ‘논리 학습’ 등 아마도 ‘논리’라는 말을 생소하게 생각하는 사람은 없을 것이다. 하지만 ‘논리학’이라고 말한다면 상황은 달라진다. ‘수학이 무엇을 공부하는 학문이지요?’라고 묻는다면 대다수의 사람들은 ‘덧셈, 뺄셈, 곱셈 등의 수의 연산을 공부하는 학문입니다.’라고 쉽게 대답을 할 것이다. 하지만 ‘논리학이 무엇을 공부하는 학문이지요?’라고 묻는다면 ‘타당한 논변의 전제들과 결론 사이에 성립하는 귀결(consequence) 관계를 탐구하는 학문입니다.’[1]라고 대답하는 사람은 그리 많지 않을 것이다. 20세기 이후 급속도로 발달한 현대의 형식 논리학의 모습은 아리스토텔레스 시절에 얘기했던 3단 논법의 모습과 상당히 동떨어져 보이기까지 한다. 급기야 논리학을 공부하는 학생조차 논리학을 왜 배워야하는지 의문을 제시하기도 한다. 아마도 이는 일반적으로 사람들이 언급하는 ‘논리학’ 혹은 ‘논리적인 설명’의 의미는 ‘설득력있는 설명’을 의미하는 다른 표현이거나 논술과 관련된 어떤 글쓰기의 방법론일 수 있기 때문에 일어나는 문제로 보인다. 왜냐하면 이러한 영역에서 언급되는 ‘논리학’의 의미와 논리학을 전문적으로 연구하는 집단에서 언급하는 ‘논리학’의 의미가 서로 다를 수 있기 때문이다.[2] 하지만 이는 ‘논리학’ 혹은 ‘논리적’이라는 표현이 애매하게 사용되어서 일어나는 문제라 생각된다. 물론, ‘논리학’, ‘논리적 귀결’ 그리고 ‘타당한 논변’에 대한 명시적인 규정을 제시하는 것도 쉬운 일은 아닐 것이다. 그러므로 적어도 이 글은 20세기 초반에 성취되었던 현대 논리학, 특히 형식 논리학에서의 결과물을 소개하는데 그 목적을 둘 것이다.

여러 논리학 분야 중에 20세기를 기점으로 가장 체계적으로 발전한 분야 중의 하나는 아마도 1차 논리(First-Order Logic)일 것이다. 필자는 20세기 초 1차 논리가 발전하게 된 배경과 그 발전 방향을 힐버트 프로그램이 사용한 공리적 방법론이 어떻게 발전했었는지에 대한 설명을 빌어 간략하게 소개할 것이다. 간혹 힐버트 프로그램을 단순한 수학 이론으로 알고 있는 이도 있을지 모르겠다. 하지만 20세기 이후 발전해온 수학기초론에 있어 1차 논리는 빼놓을 수 없는 중요한 분야이며 논리학을 포함한 집합론을 표현하는 1차 언어(First-Order Language)의 형식체계가 어떻게 구성되는지를 설명하기에 힐버트 프로그램은 상당히 효율적인 설명을 제시한다. 1차 언어(First-order language)형식체계의 구성을 살펴본 후 필자는 논리학에 있어 하나의 성공적인 사례인 괴델(Gödel, Kurt)의 완전성 정리(Completeness Theorem)를 소개할 것이다. 그리고 마지막으로 논리학과 힐버트 프로그램 그리고 수학 기초론 간의 밀접한 관계를 중심으로 전체적인 흐름을 정리할 것이며 완전성 정리가 수학 기초론과 논리학의 발전에 있어 가지는 의미에 대해 살펴볼 것이다. 논리학에 친숙한 독자는 현대 논리학의 태동부터 완전성 정리를 훑어보는 기회가 될 것이며 논리학에 친숙하지 않은 독자에게는 논리학이 이룩한 하나의 결과물을 접할 수 있는 기회가 되리라 생각한다.

I. 현대 논리학의 발전

1) Mates. B., *Elementary logic*, Oxford University press, 1972(김영정· 선우환 역, 『기호논리학』, 문화출판사, 1996), p22

2) 논리적인 설명이라고 해서 모두 설득력있는 설명이라고는 할 수 없을 것이다. 1930년 괴델(Gödel)이 그의 불완전성 정리에 대한 발표를 했을 때, 그의 설명을 제대로 이해한 이는 거의 없었다고 한다. 다시 말해, 괴델의 설명은 설득력이 있었다고 하기는 어려울 것이다. 하지만 그의 설명은 논리적인 설명이었을 수 있다. 그러므로 논리적인 설명과 설득력있는 설명은 구별되어야 할 것이다. 그렇다고 해서 일상적인 문맥에서 ‘논리적인 설명’의 의미와 ‘설득력있는 설명’의 의미가 서로 혼용됨을 지적하는 것은 아님을 알아 주기 바란다.

20세기 초 논리학의 발전은 수학기초론(Foundation of Mathematics)의 발전과 관련 되어있다. 수학기초론의 문제의식은 18, 9세기 미적분학의 발전에 기인한다. 19세기는 18세기부터 미적분학의 발전과 함께 급속도로 발전한 수학, 과학의 만족스럽지 못한 논리적 안정성의 재건이 화두가 되었던 시기였다.[3] 1874년, 이러한 분위기 속에서 게오르그 칸토르(Georg Cantor)는 삼각급수와 관련된 무한 영역을 다루려던 시도를 하게 되고 이러한 노력의 결과물로 집합론(Set theory)의 방법론을 고안하기에 이른다. 당시 집합론은 특히 크로네커(Kronecker)와 같은 구성주의자(constructivist)들로 부터 많은 비판을 받기도 했다. 하지만 그럼에도 불구하고 특히 데이비드 힐베르트(David Hilbert)와 같은 수학자로 부터 집합론이 무한을 체계적으로 다룰 수 있게 해주는 '수학자의 낙원'이라는 극찬을 받기도 했다. 집합론의 창시가 수학의 기초를 다지는데 큰 공헌을 했다는 것은 의심할 여지가 없을 것이다. 하지만 집합론의 창시가 논리학 자체의 발전에 가장 큰 기여를 한 것은 아닐 것이다.

현대 논리학의 창시자, 특히 1차 술어 논리의 창시자를 묻는다면 학자들은 단연 고틀롭 프레게(Gottlob Frege, 1848~1925)라고 할 것이다. 칸토르의 업적이 수학에 있어 매우 중요하고 또한 방대한 위치를 차지한다면 프레게의 업적은 철학, 수학, 언어학, 과학 등의 전 영역에 직 · 간접적으로 걸쳐 있다는 평가를 받기도 한다. 다음은 프레게가 「개념기호법(*Begriffsschrift*)」 서문에 남긴 글이다.

> '...만약 이것이 언어개념과 관련된 언어의 사용에 있어 빈번히 일어나는 오해를 해소하고, 일상 언어 표현의 문제점을 해결하기 위한, 정당한 사유 방식을 넘어선 (잘못된) 말의 힘을 부수기 위한 철학적 작업이라면, 이러한 목적을 위해 고안된 나의 개념기호법은 철학자들을 위한 유용한 도구가 될 수 있을 것이다.'[4]

이러한 언급은 논리학이 경험에기반한 심리학의 일종으로 비춰지던 당시의 상황에서 올바른 진리를 추구하기 위해 논리학을 체계화하겠다는 한 학자의 강한 포부를 느낄 수 있게 해준다. 프레게의 바람에 힘입어 그의 작업은 철학에 있어 언어적 전회(linguistic turn)를 일으켜 언어 철학이 부흥하는 계기를 마련했고 구문론(syntactic)과 의미론(semantic)의 구분을 가능하게 함으로써 수학 기초론에 있어 의미론적 접근(Semantical Approaches)을 가능하게 하는 계기가 되었다. 그의 업적에 대한 세부적인 소개는 독자의 관심여하에 맡기기로 한다.[5]

프레게가 현대 논리학을 창시할 당시의 상황을 통해서도 알 수 있듯이 그의 작업은 일상언어가 가지고 있는 애매성과 모호성을 정제할 목적에 있기는 했지만 주된 목적은 역시 수학의 기초를 확립하는 것이었다. 수학이 논리학에 의해 환원된다는 생각 하에 진행된 그의 작업은 안타깝게도 러셀의 역설(Russell's Paradox)에 의해 무너진다. 그리고 그의 "논리주의(Logicism)"는 러셀과 화이트헤드(Russell and Whitehead)의 『*Principia Mathematica*』로 이어진다.

---

3) 하워드 이브스, 『수학의 위대한 순간들』, 경문사, 2003, 허민· 오혜영 옮김, pp430~445.

4) Frege, G. "Begriffsschrift ", *Form Frege to Gödel - A Source Book in Mathematical Logic, 1879 - 1931*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1967(second edition 1999), ed. by Heijenoort, J. v.

5) 프레게의 논리학적 업적에 대한 간단한 소개는 다음을 참고하라. Mates. B., *Elementary logic*, Oxford University press, 1972(김영정· 선우환 역, 『기호논리학』, 문화출판사, 1996), pp364~367. 보다 세부적인 소개는 다음을 참고하라. Beaney, M., *The Frege Reader*, Blackwell Publishers, 1997, pp1~46.

1920년대 수학 기초론에 있어 이른바 “삼인방(The Big Three)”이라 불리는 논리주의(Logicism), 형식주의(Formalism), 그리고 직관주의(Intuitionism)의 치열한 대립에 대한 소개는 이 글에서 언급하기에 적합하지 않다. 하지만 프레게를 시작으로 확립된 형식언어 체계의 기초와 힐버트의 힐버트 프로그램 (Hilbert Programm)은 앞으로 소개할 완전성 정리를 설명하는데 상당히 유용하다고 할 수 있다.

II. 힐버트 프로그램(Hilbert's Program)

1. 논리주의(Logicism)와 형식주의(Formalism)

프레게의 논리학이 일상 언어(natural language)의 애매성과 모호성을 극복하고 명료성과 엄밀성을 갖춘 형식언어(formal languages)와 연역체계(deductive systems)의 발달에 깊게 공헌했음은 의심할 여지가 없을 것이다. 또한 러셀을 포함한 논리주의자들에 의해 체계화된 형식 언어를 통해 수학자들은 그들의 문제를 체계적으로 증명할 수 있게 되었다. 힐버트의 말처럼 이러한 논리학자들의 노력은 ‘초수학(meta-mathematics)’이란 이름으로 불리어지게 된다.[6)]

러셀과 화이트헤드(Russell and Whitehead)의 『*Principia Mathematica*』 이후, 1917년 힐버트는 「*Axiomatic Thought*」(1918)에서 공리체계(axiomatic systems)를 통한 일관적인 증명의 중요성을 강조하며 다시 수학기초론의 작업에 착수하게 된다. 그는 수학의 일관적인 기초체계 건설의 문제가 러셀의 『*Principia Mathematica*』에 의해 근본적으로 해결되었다고 생각하지만 모든 수학적 질문에 대한 ‘예’ 혹은 ‘아니오’의 대답을 제시할 수 있는 결정가능(decidable)한 절차가 있는가[7)]라는 의문 등을 제시하며 올바른 형식체계에 대한 물음을 지속적으로 제시한다.

논리주의와 형식주의의 가장 눈에 띄는 차이 점이라고 한다면 논리학을 사용하느냐 혹은 집합론을 사용하느냐의 차이일 것이다. 논리주의가 논리학으로 수학을 환원하려 한다면 형식주의는 칸토르의 집합론을 통해 수학의 기초를 건설하려고 한다. 러셀의 『*Principia Mathematica*』는 수학 기초론이 가지는 당시의 문제점을 최초로 보완한 작업이었음에 틀림없다. 하지만 프레게의 『산수의 기초(*The Foundation of Arithmetic*)』에서도 볼 수 있듯이 논리주의에서 제시하는 수학 기초의 기본 원리는 ‘공리(axiom)’[8)]라는 이름 대신 ‘명제(proposition)’이라는 이름으로 쓰인다. 이러한 이유는 논리주의가 가지는 그 철학적인 근간에 있다. 프레게의 「개념기호법(Begriffsschrift)」서문에서도 볼 수 있듯이 논리학은 우리의 사고(thought)를 체계화한 과정이었다. 그리고 이러한 방향에서 수학을 논리학으로 환원하려는 논리주의의 시도는 수학의 기초 원리를 “문장의 의미에 의해서 참인”, 즉 “분석 명제(analytic proposition)”를 사용하도록 이끈다. 이는 형식주의가 게임의 규칙과 같은 부정되어서는 안 되는 “규칙(Rule)”으로 공리를 제시하는 것과 상당히 동떨어진 접근이었다.

러셀의 『*Principia Mathematica*』가 그 자신의 역리를 해결한 최초의 성공적인 작업이

---

6) Shapiro, S., *Thinking about mathematics - The philosophy of mathematics*, Oxford University Press, 2000.,p153

7) Zach, R., "Hilbert's Program", *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, http://plato.stanford.edu/, 2003.

8) 거칠게 말해 ‘공리(Axiom)’란 어떤 체계가 작동하는데 있어 부정 혹은 의심되어서는 안 되는 가장 근본적인 원리다. 이해하기 힘들다면 컴퓨터의 하드웨어와 유사한 기능이라고 보면 되겠다.

었음에도 논리주의가 가진 철학적 배경은 비술어(impredicative)의 문제[9]와 같은 또 다른 문제점을 야기했다. 물론 이러한 문제점 역시 러셀은 유형이론(Type Theory)의 몇 가지 테크닉을 통해 피해가려 했지만 수학자들에게 있어 그러한 철학적인 물음은 여간 부담스러운 것이 아니었다.

형식주의자는 논리주의와 상반되게 각 기호나 식(formula) 자체가 가지는 의미를 부정하고 유한한 기호의 나열로부터 구성된 식들 간의 관계 및 추론 규칙을 중시했다. 이에 프레게는 주어진 각 공리들을 구성하는 항(term)들에 의미가 없다면, 진술(statement)은 참이거나 거짓이 될 수 없으므로 정의될 수 없는 공리들은 무의미하다는 입장을 제시한다.[10] 이러한 공격에 대한 대응은 힐버트의 다음과 같은 말로부터 찾을 수 있다.

> '우리는 이상적인 수학(ideal mathematics)의 기호나 식은 그것 자체 내에서 어떠한 의미도 가지지 않으며 오직 숫자 기호만이 어떠한 의미를 가진다는 결론에 이르렀다. (기호에 어떠한 특정 의미를 부여하지 않더라도) 우리는 이상적인 식(ideal formula)으로부터 다른 식을 이끌어낼 수 있으며 이러한 유한한 진술을 서로에게 전달하기 위한 방편으로 각 기호에 해석(interpretation)을 제시하고 그로 인해 그것들은 의미를 지니게 된다.'[11]

이와 같은 힐버트의 생각은 다음과 같이 설명될 수 있다. "만약 공리들의 집합이 일관적이라면, 그러한 공리들은 참이며 이들은 해석을 제시함으로써 의미를 지닐 수 있다."[12] 일관성을 보다 중시하는 이러한 생각은 서로 모순되는 체계이지만 그 체계 내에서는 일관적인 유클리드 기하와 비유클리드 기하의 등장 역시 일조한다.

논리주의 혹은 형식주의가 가지는 철학적인 이점이 무엇이던 간에 두 입장은 확실히 수학 기초론의 풍성한 결실을 가져다주었다고 할 수 있을 것이다. 논리주의자들에 의해 체계화된 형식 언어의 이점을 수용하는 대신 철학적인 논의를 최소화함으로써 기호들 간의 관계 및 형식 언어의 체계 자체에 더욱 집중할 수 있었던 이점이 있었다.

2. 힐버트 프로그램(Hilbert's Program)

힐버트는 1925년과 1928년에 걸쳐 증명에 대한 자신의 생각을 담은 논문을 발표하는데 이 논문에 담긴 내용은 이후 '힐버트 프로그램(Hilbert's Program)'이라 불리게 된다. 힐버트 프로그램은 폰노이만(Johann von Neumann)에 의해 다음과 같이 요약될 수 있다.[13]

---

9) Shapiro, S., *Thinking about mathematics - The philosophy of mathematics*, Oxford University Press, 2000. 혹은 Benacerraf, P. and Putnam, H., *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1964(second edition 1983).을 참고하라. 비술어의 문제는 "Vicious Circle Principle"로 더욱 유명하다.

10) Shapiro, S., *Thinking about mathematics - The philosophy of mathematics*, Oxford University Press, 2000, p155

11) Hilbert, D., "On the infinite", *Form Frege to Gödel - A Source Book in Mathematical Logic, 1879 - 1931*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1967(second edition 1999), ed. by Heijenoort, J. v.

12) "일관성"이란 어떠한 문장 φ와 $\neg\varphi$가 동시에 참일 수 없을 때를 말한다. 이는 무모순성과 같이 쓰이며 $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$와 같이 표현될 수 있다. 일반적인 1차 논리에서 일관성(무모순률)은 배중률 $(\varphi \vee \neg\varphi)$및 동일률$(\varphi \rightarrow \varphi)$과 동치이다.

① 수학과 논리학에서 사용되는 모든 기호를 나열한다. 이러한 기호들을 “원자기호(primitive symbols)”[14]라고 하며 ‘ㄱ’와 ‘→’를 포함한다.
② 고전수학(classical mathematics)에 있어 “의미 있는” 진술(statement)을 나타내는 기호로 분류된 모든 기호들의 결합을 애매하지 않게 구성한다. 이렇게 결합된 것들을 “식(formulas)”이라고 한다. 주목할 것은 (기호들의 결합에 있어) “의미 있는” 진술이 되도록 하는 것이지 그것이 꼭 참이 될 필요는 없다는 것이다. 예를 들어 ‘1＋1＝2’와 ‘1＋1＝2’는 모두 의미 있는 진술이지만 전자가 참이고 후자가 거짓이다. 하지만 ‘1 ＋ → ＝ 1’와 ‘＋＋1 ＝ →’는 의미 있는 진술이라고 할 수 없다.
③ 고전 수학의 “증명 가능한” 진술과 일치되는 모든 식을 성공적으로 구성할 수 있도록 하기 위해 구성 과정(construction procedure)을 제시해야 한다. 그리고 이러한 구성 과정을 “증명 과정(proving)”이라고 한다.
④ 유한한 계산(finitary arithmetical methods)을 통해 확인된 고전수학의 진술과 일치하는 그러한 식이 ③의 방법으로 증명될 수 있음을 (유한하게 결합되었다는 측면에서) 보인다는 것은 오직 그러한 경우에 그 진술이 참임을 보이는 것이다.[15]

③에서 언급한 ‘구성 과정’이 일관적인 형식체계를 제시하는 방식이라면, ①에서 ③의 과정을 통해 우리는 일관적인 형식체계를 구성할 수 있다. 그리고 러셀의 『*Principia Mathematica*』 역시도 유사한 방향에서 그러한 일관적인 형식체계를 구성하기도 했었다. 아마도 독자는 힐버트 프로그램의 충족 요건을 읽어가면서 ‘유한한(finitary)’이란 말이 지속적으로 쓰임을 확인했을 것이다. 이 개념은 ④를 이해하는데 있어서도 필수적이다. 힐버트는 어떠한 체계의 올바름을 확인하기 위해 효율적인 확인 과정의 필요성을 강조했는데 이때 사용한 용어가 ‘유한성’이다. 안타깝게도 힐버트가 유한성에 대한 직접적인 설명을 제시하지는 않았다고 한다. 그리고 이 때문에 아직도 힐버트의 ‘유한성’의 의미에 대한 논쟁이 있다고 한다.[16] 아마도 유한성에 대한 개괄적인 의미는 다음과 같은 예를 통해서 설명할 수 있을 것 같다. 예를 들어 사과의 개수를 세어보는 상황을 생각해 보자. 유한한 개수의 사과가 우리 앞에 있다면 몇 시간이 걸리든 그 사과의 개수를 셀 수 있다. 하지만 우리가 사과의 개수를 세는 작업을 멈추기 전까지 지속적으로 임의의 사과가 계속 더해지는 상황을 생각해 보자. 이러한 상황에서 우리는 사과의 개수가 몇 개인지 판단을 할 수 없다. 문장의 경우도 마찬가지다. 무한히 진행되는 문장에 대해 그 문장이 참인지 혹은 거짓인지를 판단할 수 없다. 같은 방향에서 어떠한 진술이 정의되는 방식은 “유한한 기호들의 집합”으로 표현되어야

---

13) Neumann, J. v., "The Formalist Foundation of Mathematics", *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1964(second edition 1983).

14) 일반적으로 적형식(Well Formed Formula)의 가장 기초가 되는 식을 ‘원자식(atomic formula)’이라고 번역하는데 있어 ‘Primitive symbol’을 ‘원시기호’라고 하기 보다는 ‘원자기호’라고 하는 것이 더욱 이해를 돕는다고 생각한다.

15) 사실 힐버트 프로그램에서 힐버트가 중점을 둔 것은 “결정가능성”의 문제였던 것 같다. 힐버트는 형식체계가 일관적으로만 이루어져 있다면 해석을 제시함으로서 그 체계가 참이 됨을 매우 당연시 여기고 있었던 것 같다. 일관적인 체계로부터 도출된 결과가 “올바르다.(참이다.)”라는 입장에서 완전성 정리와 통하기는 하지만 완전성 정리의 문제의식을 ④와 완전히 일치시키는 것은 확대해석으로 보는 것이 맞는 것 같다. 아직 미숙한 학부 학생의 논문임을 감안하여 양해를 구하는 바이다.

16) Frankel, A., Bar-Hillel, Y., and Levy, A., Foundation of Set theory, 2nd rev. ed., North-Holland Published, Amsterdam, 1973.

한다.

위 ①에서 ④의 요소 중에 ④번 요소를 주목할 필요가 있다. 힐버트 프로그램의 ① ~ ③ 요소에 의해 일관적인 체계가 세워지고 힐버트는 이 경우 그 체계내의 언어들을 참이라고 할 수 있다고 했다. 하지만 우리는 '( )는 사람이다.'에 대해 이것이 참인지 혹은 거짓인지를 말하지 않는다. 괄호 속에 무엇이 들어가느냐에 따라 참 혹은 거짓의 값이 달라지기 때문이다. 형식주의 역시 마찬가지다. 일관적인 체계라고 해서 꼭 그 체계내의 모든 적형식들(well formed formulas)이 참이라는 보장이 없다. 말하자면 모든 체계내의 적형식들을 참이게 하는 해석(interpretation)이 필요한 것이다. 이와 관련된 내용이 이 글의 핵심이라고도 할 수 있는 완전성 정리이다. 완전성 정리에 대한 내용은 뒤로 미루도록 하고 우선 힐버트 프로그램의 ①에서 ②의 과정을 통해 1차 논리의 언어가 어떻게 구성되는지를 알아보도록 하자. 그리고 4장에서부터 ③과 형식체계의 완전성 정리에 대해 알아보도록 할 것이다.

3. 1차 논리의 언어(First-Order Language)

이 단락에서는 힐버트 프로그램의 ①, ② 과정에 의해 어떻게 1차 논리의 언어가 구성되는지를 소개할 것이다. 논리학에 익숙하지 않은 독자라면 이러한 기호의 나열을 소개하는 것이 매우 당황스러울 것 같다. 이해를 돕기 위해 친숙한 "한글"로부터 무한한 문장의 나열이 어떻게 만들어지는지를 살펴보고 넘어가도록 하자. 한글은 'ㄱ', 'ㄴ', 'ㄷ'등의 '자음'이라 불리는 음소와 'ㅏ', 'ㅑ', 'ㅓ' 등의 '모음'이라 불리는 음소가 결합하여 '가', '단', '닭'등의 음절 단위로 나누어진 "글자"를 형성한다. 그리고 이러한 글자가 모여 '이특의 꿈은 세계 정복입니다.'와 같은 문장이 만들어진다. 그리고 이러한 문장은 '당신은 '이특의 꿈은 세계 정복입니다.'와 같은 문장에 대해 어떻게 생각하십니까?'와 같이 다른 문장의 사이에 끼워 넣음으로써 또 다른 문장을 만들 수 있다. 또한 '이특의 꿈은 세계 정복입니다. 그리고 박순희의 꿈은 이특의 정복입니다.'와 같이 두 문장이 '그리고'에 의해 결합하여 또 다른 문장 역시 만들어질 수 있다. 앞으로 필자가 보게 될 문장 형성과정 역시 이 과정과 유사하다. 하지만 논리학은 위 글에서도 볼 수 있듯이 '세계 정복', '이특의 정복'과 같은 여러 가지 의미로 해석되는 일상 언어의 애매성과 모호성을 정제해야 한다. 그렇기 때문에 한글의 기호 'ㄱ', 'ㅏ' 등에 해당하는 인공언어의 기호와 이들의 작용에 대한 소개가 필요한 것이다.

다음은 1차 논리의 언어를 배열한 것이며 이는 힐버트 프로그램의 ①단계에 해당한다. 각각은 'ㄱ'을 '자음' 혹은 '초성체계'라는 이름을 부여해 분류하듯 약속에 의해 '논리 기호(Logical symbols)'와 '파라미터(Parameters)'라는 이름을 부여해 구별한 것이며 주요 기호들의 이름과 그 기능을 간략하게 설명한 것이다. 각각의 기호가 가지는 별도의 함축을 예측하려는 노력은 필요 없을 것이라 생각한다.17)

가. 논리기호(Logical symbols)

---

17) Enderton, H., *A Mathematical Introduction to Logic*, HARCOURT/ACADEMIC PRESS, 1972(second edition 2001), pp69~79. 파라미터를 비논리상항(non-logical constant)로 구별하기도 한다. Mates. B., *Elementary logic*, Oxford University press, 1972(김영정· 선우환 역, 『기호논리학』, 문화출판사, 1996)를 참고하라.

㉠ 괄호(Parentheses) : (,).
㉡ 문장연결 기호(Sentential connective symbols) : →, ¬.
㉢ 변항(Variables) : v_1, v_2, … ,v_n와 같이 각각의 이탤릭 소문자 옆에 양의 정수 n을 아래첨자로 표기하여 사용한다.[18]
㉣ 동일성 기호(Equality symbols)[19] : =.

나. 파라미터(Parameters)

㉠ 양화기호(Quantifier symbol) : ∀.[20]
㉡ 술어기호(Predicate symbols) : 각각의 양의 정수 n에 대해, 공집합이거나 기호들의 집합이며 'n항 술어 기호'(n-place predicate symbols)라 읽는다.[21]
㉢ 상항 기호(Constants symbols) : 공집합이거나 기호들의 집합이며 변항을 가지고 있지 않다는 의미에서 '0항 함수 기호(0-place function symbols)'로 불리기도 한다.[22]
㉣ 함수 기호(Function symbols) : 각각의 양의 정수 n에 대해, 공집합이거나 기호들의 집합이며 'n항 함수 기호(n-place function symbols)'라 읽는다.

1차 논리의 언어의 기호를 사용함에 있어 한 가지를 가정해야할 것이 있다. 첫 번째로 각 기호는 서로 구별되어야 한다. 예를 들어 상항 기호 a, b를 사용할 경우, 별도의 전제가 없다면 $a \neq b$를 가정하는 것이다. 두 번째로 어떠한 기호도 다른 기호들의 유한한 나열이어서는 안 된다. 예를 들어 다음의 수열을 생각해 보자. 각각의 양의 정수 n에 대해,

$$<a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n>,\ <b_1,\ b_2,\ \ldots\ ,b_n>,\ <c_1,\ c_2,\ \ldots\ ,c_n>$$

의 세 수열이 있다고 하자. 이때, $a_1 = <c_1,\ c_2>$, $a_n = c_n$, $c_1 = <b_1, b_2>$, 그리고 $c_n = b_n$과 같은 함축이 성립한다고 한다면 $<a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n> = <b_1,\ b_2,\ \ldots\ ,b_n>$가 성립한다고 말하기 어려울 것이다. 즉 $a_i = b_i$와 같은 규칙이 없다고 한다면 위는 성립하지 않을 수 있는 것이다.[23] 이제 이러한 1차 논리 언어의 기호를 통해 한글의 문장과 같은 식이 어떻게 구성되는지 알아보도록 하자.

---

18) 일반적인 1차 술어 논리(the predicate calculus of first order)에서는 'u'에서 'z'까지의 소문자 이탤릭 글자로 표현한다.

19) 동일성 기호를 사용하지 않기도 한다. 하지만 '어떤 것이든 그것은 자기 자신과 같다.'라는 문장의 의미를 우리는 매우 직관적으로 받아들이듯 이를 이항 술어로 정의하여 사용하는 것 보다 논리기호로 차용하는 것이 더욱 경제적인 것 같다. 이 글에서는 논리기호로 동일성 기호를 차용할 것이다.

20) "임의의 x", 혹은 "모든 x"를 표현할 때, '$\forall x$'와 같이 사용한다. "어떤 x"의 표현에는 '$\exists x$'를 사용한다.

21) 일반적인 1차 술어 논리에서는 아랫첨자 그리고/또는 윗첨자를 가지고 있거나 가지고 있지 않은 대문자 이탤릭 글자로서 술어를 표현한다.

22) 일반적인 1차 술어 논리에서는 아랫첨자를 가지고 있거나 가지고 있지 않은 'a'에서 't'까지의 소문자 이탤릭 글자를 사용한다.

23) 보다 자세한 설명은 Enderton, H., *A Mathematical Introduction to Logic*, HARCOURT/ACADEMIC PRESS, 1972(second edition 2001), p4를 참고하라.

4. 적형식(Well Formed Formula)의 구성

이 단락에서 우리는 문법적으로 올바른 표현(적형식)을 구성하는데 주력할 것이다. 이 단계는 힐버트 프로그램의 ② 단계에 해당하며 ②의 '의미 있는 진술'은 여기서의 '적형식'에 해당한다. 먼저 '표현(expression)'을 '유한하게 나열된 기호들'로 정의하자. 그렇다면 우리는 명사나 대명사를 말하는 항(term)을 정의할 수 있다. 항의 구성을 위해 다음과 같은 메타 함수(meta-function)[24]를 도입할 수 있다.

$$T_f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = f\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$$

메타 함수 T_f는 상항 기호 혹은 변항을 함수 f와 결합시켜 주는 역할을 한다는 뜻이다. 이 메타 함수를 사용하여 항을 다음과 같이 정의할 수 있다.

정의2.4.1. 항들의 집합은 상항기호와 변항을 T_f에 한번도 적용하지 않거나 한번 이상 적용하여 만들어진 표현의 집합이다.

항이 정의되었다면 이제 원자식(Atomic Formula)을 정의할 수 있다. 원자식이란 일반적으로 n항 술어 기호 P에 n개의 항 $\tau_1, \dots, \tau_n$를 결합시킨 $P_{\tau_1, \dots, \tau_n}$의 형태를 말하나 문장 연결 기호 →, ¬ 혹은 양화기호 ∀과 결합하지 않은 함수 형태나 술어 형태 모두 원자식에 해당한다. 참고로 $\tau_1 = \tau_2$도 원자식이며 "τ_1은 τ_2와 같음(τ_1 is identical to τ_2)"을 뜻한다. 이제 문법적으로 올바른 표현인 적형식(Well Formed Fomula)를 구성할 수 있다. 논리학은 이 적형식 만을 논의 대상으로 사용하므로 매우 중요한 개념이라 할 수 있다. 적형식을 구성하기 위해 식을 구성하는 메타 함수를 도입하자.

$$\varepsilon_{\neg}(\gamma) = (\neg\gamma).$$
$$\varepsilon_{\rightarrow}(\gamma,\ \delta) = (\gamma \rightarrow \delta).$$
$$\omega_i(\gamma) = \forall v_i(\gamma).$$

정의2.4.2. 적형식의 집합은 원자식을 메타함수 $\varepsilon_{\neg}$, $\varepsilon_{\rightarrow}$, $\omega_i (i = 1, 2, \dots)$에 한번도 적용하지 않거나 한번 이상 적용하여 만들어진 표현의 집합이다.

예를 들어 $\neg v_1$를 보면 ¬은 $\varepsilon_{\neg}$에 의해 원자식과만 결합할 수 있으므로 변항과 결합한 $\neg v_1$은 적형식이 아니다. 이쯤에서 문장 연결기호인 ∨, ∧, ↔와 양화 기호인 ∃가 논리학에서 어떻게 사용하는지 언급해야 할 것 같다. 이들 기호는 →, ¬, ∀를 사용하여 다음과 같이 사용할 수 있다.[25]

---

24) 'meta-'라는 말은 '~의 넘어있는'이라는 의미를 가진다. 한글에서 'ㅊ', 'ㅗ', 'ㅣ'의 각 기호들이 '최'로 결합하는데 필요한 장치(operator)는 훈민정음 내에 명시되어 있지 않다. 단지 이들 기호를 '최'와 같이 결합하여 쓸 수 있다는 언급을 통해 우리는 직관적으로 각 기호들을 결합하여 사용한다. 이렇듯 1차 논리의 언어 기호의 범위에 넘어 있으나 (속해있지 않으나) 이들 기호를 결합하여 더 큰 단위로 만들어주는 직관적인 함수를 메타함수(meta-function)이라고 할 것이다. 또한 메타 함수를 통해 결합된 표현들 각각을 가리키기 위해 α, β, γ와 같은 메타 기호(meta-symbol)를 사용할 것이다. 3단락 마지막에 제시한 '어떠한 기호도 다른 기호들의 유한한 나열이어서는 안 된다.'는 규정은 메타 기호에서는 적용되지 않는다.

$$(\alpha \vee \beta) \equiv ((\neg\alpha) \rightarrow \beta)).$$
$$(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg(\alpha \rightarrow (\neg\beta)))$$
$$(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv (\neg((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg(\beta \rightarrow \alpha)))).$$
$$\exists x\alpha \equiv (\neg\forall x(\neg\alpha)).$$

지금까지 적형식이 어떻게 구성되는지를 살펴보았다. 독자는 1차 논리의 언어가 구성되는 과정과 힐버트 프로그램의 ①, ② 단계를 확인함으로써 논리주의와 형식주의가 제시한 형식체계에 대한 이해를 높일 수 있을 것이다. 마지막으로 문장(sentence)에 대해 정의하고 이 단락을 마칠까 한다. 문장이란 어떤 적형식에 있어 어떠한 변항도 상항기호나 양화 기호에 의해 채워지거나 속박(bounded)되지 않은 채 자유롭게 나타나지 않을 경우를 말한다. 예를 들어 어떤 변항 v_1과 1항 술어 P에 대해, Pv_1는 v_1이라는 변항이 자유롭게 나타났으므로 문장이 아니나 P_t 혹은 $\forall v_1 Pv_1$는 변항 v_1가 자유롭게 나타나지 않았으므로 문장이라고 할 수 있다.[26)]

III. 의미론과 구문론 그리고 증명과 모형(해석)

힐버트 프로그램의 ③, ④단계는 이 글의 주된 목적인 완전성 정리에 직접적으로 관련된 부분이다. ③의 단계를 통해 형식체계에서 말하는 증명이 어떻게 구성되는지를 알 수 있으며 증명된 문장이 형식체계에 어떻게 포함되는지를 살펴볼 수 있다. 남은 완전성 정리단계의 내용은 4장에서 본격적으로 다루게 될 것이다. 이 장에서는 의미를 부여받지 못한 적형식이 모형(Model)에 의해 어떻게 의미를 가지게 되는지를 탈스키(Alfred Tarski)의 방법에 따라 알아보게 될 것이다. 하지만 완전성 정리와 관련된 기초적인 설명을 제시하기에 앞서 "의미론"과 "구문론"에 대해 언급하고 넘어가는 것이 좋겠다.

1. 의미론(Sementics)과 구문론(Syntax)

예를 들어 다음의 기호들을 생각해 보자. '3', '///', 'III', '三'. 아마도 우리는 이러한 기호를 보는 순간 수(number) 3를 떠올리게 될 것이다. 숫자(numeral) '3', '///', 'III', '三'은 모두 같은 수 3을 언급하지만 그 표기 방법은 다르다. 이렇게 기호(symbol)의 측면과 그것의 의미(meaning)의 측면은 손쉽게 나누어 생각할 수 있다. 그렇다면 다음 질문을 생각해 보자. '기호들을 어떻게 체계적으로 나열할 것인가?', '나열된 기호들을 어떻게 이해할 것인가?' 의심할 것도 없이 위의 두 질문은 서로 다른 내용을 묻고 있다. 전자에 해당하는 물음이 구문론(Syntax)에 대한 물음이며 이 기호들의 해석(interpretation)을 묻는 후자의 물음이 의미론(Sementic)에 대한 물음이다. 이제 앞으로의 진행을 위해 '해석'의 의미를 간단하게 알아보고 논리학에서 사용되는 몇 가지 예비적인 구문론의 개념과 의미론의 개념을 살펴보자. 구문론과 의미론의 구분은 앞으로 있을 증명(proof)과 모형(Model)을 이해하는데 있

---

25) 각 문장이 같은 의미임을 언급하기 위해 메타기호 '≡'를 각 문장들 사이에 사용할 것이다. '≡' 양옆의 식은 동어반복적(tautology)이라고 할 수 있는데 '동어반복(tautology)' 개념은 4장에서 설명할 것이다.

26) 자유 변항에 대한 자세한 사항은 다음을 참고하라. Enderton, H., *A Mathematical Introduction to Logic*, HARCOURT/ACADEMIC PRESS, 1972(second edition 2001), p76

어 가장 기초적인 지식이므로 각 개념간의 성질에 혼동이 없도록 숙지하기 바란다.

앞장에서 보았던 $(\neg\forall x(\neg Px))$와 같은 식을 떠올려 보자. 우리는 이 문장이 참인지 혹은 거짓인지를 판단할 수 없다. 하지만 논의 영역을 과일들의 집합으로 두고 Px에 'x는 사과이다.'라는 의미를 부여하면 $(\neg\forall x(\neg Px))$는 참이라는 진리값을 부여 받을 수 있다. 여기서 논의 영역 및 'x는 사과이다.'라는 의미를 확정해주고, P의 속성을 만족시키는 적합한 대상을 P에 부여해 주는 것을 해석(interpretation)이라 한다. 다시 말해 앞 단락에서 보았던 적형식들로 이루어진 임의의 집합을 $\mathcal{L}$이라고 할 때, $\mathcal{L}$의 한 문장 α가 주어졌다면, $\mathcal{L}$의 해석 Γ는 α에 나타나는 각각의 파라미터(비논리상항)에 지시체를 할당하고 그것이 개체 상항일 경우에는 (어떤 논의세계에 속한) 개체를 할당한다. 이러한 방식으로 구문론적인 기호의 나열인 표현이 참 혹은 거짓의 진리값을 가지게 되는 것이다. 이에 대한 보다 자세한 설명은 다음 단락에서 알아보도록 하겠다.

이제 "해석"의 개념을 가지고 구문론적 개념과 의미론적 개념의 예를 살펴보도록 하자. 다음은 구문론적 개념과 의미론적인 개념을 나누어 제시한 도표이다.[27]

의 미 론 적 개 념	
타당하다.(Valid)	- 문장 α는 모든 해석 하에서 참일 경우 오직 그 경우에만 타당하다. (혹은, 논리적으로 참이다. (logically true)). : 'α가 타당하다.'는 $\vDash\alpha$와 같이 표기한다.
귀결(Consequence)	- 문장 α와 문장 집합 Γ에 대해, Γ의 모든 문장들을 참이게 하면서 α를 거짓이게 하는 해석이 존재하지 않을 경우 오직 그 경우에만 α는 Γ의 귀결이다. : 'α는 Γ의 귀결이다.'는 $\Gamma\vDash\alpha$와 같이 표기한다.

구 문 론 적 개 념	
도출(Deduction)	- 문장들의 유한한 집합 Γ의 원소이거나 추론규칙에 의해 Γ로부터 α가 이끌어져 나왔을 경우 α를 Γ의 도출이라고 한다. (만약 $\alpha\in\Gamma$ 이면, $\Gamma\vdash\alpha$이다.)
도출가능함(Deducible)	- 문장들의 유한 집합 Γ에 대해, 'Γ로부터 도출 가능하다'는 말은 Γ로부터의 도출(deduction)이 있다는 말이다. 'Γ로부터 α가 도출가능하다.'는 $\Gamma\vdash\alpha$와 같이 표기한다.
정리(Demonstration or Theorem)	- 공집합으로부터 어떤 문장 α가 도출가능할 경우 α를 정리라고 한다.

의미론적 개념이 참 · 거짓의 진리값을 부여하는데 특징이 있음을 포착하지 못한다면 의미론적 개념과 구문론적 개념 사이의 차이를 이해하기 힘들 것이다. 힐버트 프로그램의 ①, ②, ③ 단계를 통해 주어진 적형식으로부터 추론 규칙을 거쳐 새로운 적형식을 이끌어 내는 것이 구문론에 해당한다. 그리고 완전성 정리 단계에서 보여야할 방향인 적형식이 참인지 거짓인지에 대한 진리치 부여가 의미론에 해당한다. 이제 ③의 단계로 넘어갈 차례다. 다음 단락에서 우리는 증명의 의미와 그러한 증명이 어떻게 구성되는지를 살펴볼 것이다.

---

27) 표에서 제시된 각각의 개념 및 논리 기호들에 대한 설명은 Mates. B., *Elementary logic*, Oxford University press, 1972(김영정· 선우환 역, 『기호논리학』, 문화출판사, 1996)와 Sainsbury, M., *Logical Form – An Introduction to Philosophical Logic*, Blackwell Publishers, 1991(second edition 2001), pp392~405 그리고 Boolos, G. and Jeffrey, R., *Computability and Logic*, Cambridge University Press, Cambridege, 1974 (fourth edition 2002), p148, p167를 참고 하였다.

또한 해석이 형식적인 방향에서 어떻게 주어지는지도 살펴볼 것이다.

2. 증명과 모형(해석)의 의미

폰노이만이 제시한 힐버트 프로그램의 ③의 단계로 돌아가자. 그에 따르면 ③의 증명 과정은 다음의 두 가지로 나누어질 수 있다.

- $③_1$ 식(formula)은 애매하지 않고 유한한 방향에서 '공리(Axiom)'라는 이름으로 특성화(characteriazed)되어야 한다.
- $③_2$ 만약 α와 β가 두 의미 있는 식(적형식)일 경우, 그리고 α와 $\alpha \rightarrow \beta$가 모두 증명되었을 경우, β 역시 증명되었다고 할 수 있다.[28]

$③_2$는 전통적인 개념으로 '전건긍정(modus ponens)'을 말한다. 우리는 $③_1$과 $③_2$의 과정을 통해 공리 집합의 어떠한 식으로부터 전건긍정을 유한번 적용해 무한한 수의 증명가능한 식을 도출할 수 있음을 알 수 있다.[29] 이렇게 $③_1$로부터 제시된 공리로부터 전건긍정을 통해 도출된 식의 집합은 다음과 같이 설명될 수 있다. Λ를 공집합이 아닌 공리라 불리는 식들의 무한한 집합으로 그리고 Γ를 어떤 식들의 집합이라고 하자. 그렇다면 다음과 같은 정의가 가능하다.

정의3.2.1. Γ로부터 φ의 도출(연언, deduction)은 식들의 유한한 나열$< \alpha_0, \cdots, \alpha_n >$이고 이때 α_n은 φ이면서 각각의 $k \leq n$에 대해, 다음과 같은 성질을 가진다.

㉠ α_k는 $\Gamma \cup \Lambda$의 원소이거나,

㉡ a_k는 식들의 유한한 나열에서 자신 보다 이전의 두 식들로부터 전건긍정에 의해 얻어진다.(즉, 어떤 k보다 작은 i와 j에 대해, α_j은 $\alpha_i \rightarrow \alpha_k$일 때, α_i와 α_j의 전건긍정에 의해 α_k를 가지게 된다.)[30]

앞 단락에서 설명했던 구문론적 개념인 '도출(deduction)'을 떠올려 보자. 우선, φ가 $\Gamma \cup \Lambda$의 원소일 경우 $\Gamma \cup \Lambda$로부터 φ의 도출이 가능하다. 즉 $\Gamma \cup \Lambda \vdash \varphi$이다. 또한 전건긍정(추론규칙)에 의해 φ의 도출이 가능하다. 위 ㉡의 예를 가져와 α_i, $\alpha_j \in \Gamma \cup \Lambda$라면 전건긍정에 의해 α_k를 도출할 수 있다. 이때 k가 φ의 마지막 원소$(k=n)$라면 φ는 유한한 수열 $< \alpha_1, \cdots, \alpha_i, \alpha_j, \alpha_k >$이 된다. 말하자면 전건긍정에 의해 도출된 α_k가 $\Gamma \cup \Lambda$의 원소로 포함되는 것이다. α_k와 다른 원소간의 전건긍정에 의해 도출된 원소 역시 $\Gamma \cup \Lambda$의 원소로 포

---

28) Neumann, J. v., "The Formalist Foundation of Mathematics", *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1964(second edition 1983).

29) 폰노이만의 지적대로 ③의 방법이 어떠한 식 α가 증명될 수 있음을 결정할 수 있는 절차를 함축하고 있지는 않다. 결정가능성(decidability)의 문제는 보다 복잡하고 어려운 문제이다.

30) Enderton, H., *A Mathematical Introduction to Logic*, HARCOURT/ACADEMIC PRESS, 1972(second edition 2001), p111.

함될 수 있는데 이러한 현상을 귀납의 원리라고 한다. 귀납의 원리는 다음과 같이 정의 된다.

귀납의 원리(Induction Principle) S는 $\Gamma \cup \Lambda$를 포함하는 적형식들의 집합으로 하고 전건긍정에 의해 닫혀(closed)있다면 S는 모든 Γ의 정리(도출)를 포함한다.[31)]

우리는 위 정의와 귀납의 원리에 의해 $\Gamma \cup \Lambda$가 무한한 증명 가능한 원소들의 집합이 됨을 알 수 있다. 힐버트는 수학은 증명가능한 식들의 목록(inventory)이라고 했다. 또한 수학적 증명이란 추론규칙에 따른 전제와 결론의 나열이라고 했으며 어떠한 식이 증명가능하다는 것은 그 식이 증명의 마지막 나열일 때라고 했다.[32)] 그러므로 위 설명에서의 α_k의 증명은 $<\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \alpha_j, \alpha_k>$이 되고 α_k는 이 수열의 마지막 원소이므로 증명가능하다. 일반적으로 증명가능한 수열의 마지막 원소 α_k를 정리(Theorem)라고 한다.

이렇게 ③의 단계를 통해서 형식체계의 증명가능한 식들의 목록이 나열됨을 볼 수 있다. 이제 "이렇게 세워진 체계가 일관적인가?"라는 의문이 남아 있다. 힐버트는 일관적인 공리집합과 전건긍정의 추론 규칙을 선택했을 때, 그것들에 의해 도출되는 식들 역시 일관적일 것이고 이러한 과정의 반복을 통해 일관적인 수학의 형식체계를 세울 수 있다고 말했다. 이는 다음과 같은 논변으로 요약된다.

> 만약 고전 수학의 형식체계가 비일관적(inconsistent)이라면, 유한한 수의 공리들만을 사용하여 "$1=2$"의 증명이 존재한다. 그렇다면 공리 체계 Λ는 이미 비일관적이다. 그러므로 유한한 수의 공리들만을 사용하여 "$1=2$"의 증명이 존재하지 않는다면 고전 수학의 공리체계는 일관적이다. 즉 모든 유한한 하부 체계가 일관적이라면 고전 수학의 공리 체계는 확실히 일관적이다.[33)]

지금까지 ③의 단계를 통해 일관적인 형식체계가 세워지는 방향을 살펴보았다. 더욱 자세한 묘사는 다음 장에서 제시될 것이다. 완전성 정리로 넘어가기에 앞서 형식체계가 의미를 가질 수 있도록 해석을 제시하는 방법을 살펴보자. 이미 우리는 구문론과 의미론을 말하며 '해석'의 개념에 대해 알아보았다. 이 단계에서는 탈스키(Alfred Tarski)의 모형 이론적 진리 개념(Model-theoretic truth definition)을 통해 해석이 어떻게 주어지는지를 간단하게 알아보겠다.[34)]

---

31) ibid., '닫혀있음(closed)' 이란 어떤 집합 A에 있어 A의 원소에 어떠한 연산(operation)을 적용하여 도출된 원소가 여전히 A에 속해 있을 때, 집합 A를 닫혀 있다고 한다.

32) Hilbert, D., "On the infinite", *Form Frege to Gödel - A Source Book in Mathematical Logic, 1879 - 1931*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1967(second edition 1999), ed. by Heijenoort, J. v., p383

33) Neumann, J. v., "The Formalist Foundation of Mathematics", *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1964(second edition 1983). 일관적인 체계에서 $\varphi \wedge \neg\varphi$가 도출될 수 없듯이 "$1=2$"도 마찬가지다 여기서는 수학을 대상으로 한 설명이기 때문에 "$1=2$"의 예가 나왔다.

34) 건전성(Soundness)과 괴델의 완전성(Completeness) 정리가 제시되던 당시의 실제 논문에서는 모형 이론적 진리 개념에 사용된 탈스키의 '$\models$'과 같은 기호의 사용은 없었던 것 같다. 하지만 현대적인 해석에 있어 이는 매우 일반적이고 유용함으로 이를 사용하되 Enderton, H.의 *A Mathematical Introduction to Logic*,에 제시된 방식을 기반으로 글을 진행해 가겠다. 이 단락부터 이어지는 장에서 사용되는 개념 역시 동일한 책을 기반으로 할 것이다.

1차 논리의 언어에 대한 해석[35]이 우리에게 말해주는 바는 다음과 같이 요약될 수 있다.

㉠ 보편 양화 기호 ($\forall$, for all)가 언급하려는 바가 어떤 대상 집단인가?
㉡ 파라미터(술어 기호 및 함수 기호)가 가리키는 바(대상)가 무엇인가?

이제 보다 형식적으로 접근해 보자. 주어진 1차 논리 언어에 대해 해석 $\mathbb{A}$는 정의역(domain)이 파라미터들의 집합인 함수이며 다음의 성질을 가진다.

㉠ $\mathbb{A}$는 "전영역(universe)" 혹은 정의역이라 불리는 공집합이 아닌 집합 $|\mathbb{A}|$를 양화 기호 $\forall$에 할당한다.
㉡ $\mathbb{A}$는 n항 관계(n-ary relation) $P^{\mathbb{A}} \subseteq |\mathbb{A}|^n$를 각각의 n항 술어 기호 P에 할당한다. ($P^{\mathbb{A}}$는 전영역의 n쌍(n-tuples)의 원소들의 집합을 말한다.)
㉢ $\mathbb{A}$는 전영역 $|\mathbb{A}|$의 원소인 $c^{\mathbb{A}}$를 각각의 상항기호 c에 할당한다.
㉣ $\mathbb{A}$는 n항 연산(n-ary operation) $f^{\mathbb{A}}: |\mathbb{A}|^n \rightarrow |\mathbb{A}|$를 각각의 n항 함수 기호 f에 할당한다.

집합론을 예로 들어 보자. 집합론에 있어 유일한 파라미터는 $\in$이다. 이 경우 해석 $\mathbb{A}$를 가진다고 했을 때,

$$|\mathbb{A}| = \text{자연수의 집합}$$
$$\in^{\mathbb{A}} = m < n\text{인 순서쌍 } <m, n>\text{들의 집합}$$

가 된다. 즉 해석 $\mathbb{A}$는 2항 술어 파라미터인 $\in$에 대해 집합 $\in^{\mathbb{A}}$에 포함되는 원소를 부여해 줌으로써 $m \in n$의 적용을 가능하게 해준다. 주의할 것은 $|\mathbb{A}|$는 공집합이 아니며 $f^{\mathbb{A}}$는 $|\mathbb{A}|^n$의 모든 원소를 자신의 정의역으로 가져야 한다. 이제 해석의 적용을 어떻게 표현할 수 있는지 알아보자. 어떠한 문장 φ와 해석 $\mathbb{A}$에 있어, "φ가 $\mathbb{A}$에서 참이다."는

$$\mathbb{A} \vDash \varphi$$

로 정의될 수 있으며 "$\mathbb{A}$는 φ의 모델이다."라고 말한다. 조금 더 자세하게 나가 보자. φ를 1차 논리 언어의 적형식으로 $\mathbb{A}$를 이 언어의 해석으로 그리고 모든 변항의 집합 V로부터 $\mathbb{A}$의 전영역 $|\mathbb{A}|$로의 함수 $s: V \rightarrow |\mathbb{A}|, V = \{v_0, v_1, \ldots\}$를 두자. 그러면 우리는 "$\mathbb{A}$는 s와 함께 φ를 만족시킨다.(satisfied)"를 다음과 같이 정의할 수 있다.[36]

$$\mathbb{A} \vDash \varphi[s]$$

형식적인 의미에서 $\mathbb{A} \vDash \varphi[s]$라는 것은 오직 그 경우에 변항 x가 φ의 어디에서든 자유롭

---

35) 해석(interpretation)은 구조(structure)로 불리기도 한다. 'structure'가 수학, 논리학을 공부하는 이들에게는 더욱 친근한 단어이겠지만 '의미를 부여한다.'는 내용을 전달하는 단계이므로 '해석'이란 용어를 더욱 자주 사용할 것이다.

36) $\mathbb{A} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n)$는 $\mathbb{A} \vDash \varphi(v_1, \ldots, v_n)[a_1, \ldots, a_n]$로도 쓸 수 있는데 이는 φ의 변항$v_1, \ldots, v_n$를 $|\mathbb{A}|$의 원소 $a_1, \ldots, a_n$로 채웠다는 의미이다. 이런 방향에서 $\mathbb{A} \vDash \varphi[s]$는 함수 $s: V \rightarrow |\mathbb{A}|$에 변항 v_i의 값이 들어오면 이를 $|\mathbb{A}|$의 원소 a_i를 값으로 내어 놓는다는 의미이다. 즉 $\mathbb{A} \vDash \varphi[s]$는 $\mathbb{A} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n)$와 같은 의미가 된다.

게 나타날 때, $\mathbb{A}$에 의해 변항 x가 $s(x)$로 해석되어 짐으로써 φ의 해석이 참이 된다는 말이다. 이제 힐버트 프로그램의 ④단계를 설명하기 위한 기초적인 개념 설명은 끝난 것 같다. 다음 장에서는 1차 논리의 공리를 소개하고 이들 타당함을 증명함으로써 건전성 정리를 소개하도록 할 것이다. 앞으로의 4, 5장은 건전성, 완전성 정리에 대해 보다 형식적으로 다루게 될 것이다. 각 장의 머리글을 통해 증명의 개괄적인 묘사를 제시할 것이므로 형식적인 증명에 익숙하지 않은 독자는 개괄적인 묘사만을 숙지하고 6장으로 넘어가도 이 글의 전체적인 내용을 파악하는 데는 무리 없을 것이라 생각한다.

IV. 1차 논리의 공리와 건전성(Soundness)

1928년 힐버트와 에커만(Ackermann)은 그들의 저서 「이론적 논리의 기초(Princibles of Theoretical Logic)」에서 최초로 1차 술어 논리[37]의 완전성에 대한 명확한 물음을 제시한다. “1차 술어 논리의 주어진 공리체계(Axiom System)로부터 각 논리식(logical formula)의 변항에 올바른 값이 대입된(참인 값이 되는) 그러한 모든 논리식이 도출될 수 있는가?”[38] 그리고 이듬해 때마침 이러한 문제에 관심을 가지고 있던 쿠르트 괴델(Kurt Gödel)은 그의 박사 학위 논문으로 이에 대한 긍정적인 답변을 제시하는데 이것이 괴델의 완전성 정리(Completeness Theorem)이다. 괴델의 완전성 정리는 증명을 통해 밝힌 내용뿐만 아니라 이전 저작들과 비교해 제시되어야 할 세부적인 기초 개념을 적절히 정의했다는데 있다. 이전까지 쓰이던 “논리적 표현(logical expression)”은 괴델에 와서 “동일성 기호 없는 일차 논리의 적형식(a well-formed first order formula without identity)”로 정의되고 어떤 표현이 “반증가능(refutable)”하다는 것은 그것의 부정이 증명가능하다로 “타당하다.(valid)”는 모든 해석 하에서 참이다로 그리고 “만족가능하다.(satisfiable)”는 어떤 해석 하에서 참이다로 규정하고 있다. 괴델이 제시한 이 개념들은 현대에도 그대로 사용하고 있는 개념들이다. 이러한 개념 정리를 바탕으로 괴델이 증명한 완전성 정리는 다음과 같이 말할 수 있다.

> 모든 타당한 논리적 표현은 증명가능하다. 동일하게, 모든 논리적 표현은 또한 만족가능하거나 반증가능하다.

이것이 힐버트 프로그램의 ④단계 요소가 결정가능성의 문제와 함께 필요로 하는 요소이다. 이 장에서는 1차 논리의 공리를 제시하고 그로부터 도출된 문장이 만족가능하거나 반증가능함(모형을 가지고 있음)을 증명할 것이다. 이를 1차 논리의 건전성(Soundness)이라고 한다. 앞장에서 언급했듯이 이 장부터는 보다 형식적으로 접근할 것이다. 앞으로 제시될 논리학의 공리와 증명의 방법은 힐버트와 괴델 그 자신들이 제시했던 방식에서 보다 현대에 유용하게 정제된 방식으로 증명을 진행할 것이다. 또한 4, 5장에 사용되는 각각의 정리들은 시간적인 흐름에 의해 제시한 것이 아니라 완전성 정리에 필요한 요소를 중심으로 제시한 것이기 때문에 역사적인 방향과의 혼란이 없기를 바란다.

---

37) 원문은 ‘The completeness question for the first order predicate calculus’이다. 현대에는 ‘완전성 정리’와 ‘논리’의 사용이 일반적이라 ‘calculus’를 그대로 번역한 ‘계산’ 보다는 ‘논리’로 번역하는 것이 더욱 이해를 돕는다 생각한다.

38) Kennedy, J., "Kurt Gödel", *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, http://plato.stanford.edu/, 2007.

0. 예비사항

앞장에서는 어떠한 식에 모형이 제시되는 세부적인 원리에 대해서는 언급하지 않았었다. 이미 앞 장에서 제시되었어야할 부분이나 개괄적인 설명에 목적이 있었던 장이었기 때문에 내용이 이 장으로 넘어왔음을 밝힌다.

이제 항에서부터 원자식 그리고 식에 회기적(recursive)[39]인 방식으로 모형이 제시되는 모습을 살펴보자. 앞장에서 제시된 s함수를 다음과 같이 모든 항들의 집합 T에 관한 함수$\overline{s}$로 확장한다. 앞으로도 어떠한 함수의 확장을 ‘ $\overline{\ }$ ’를 써서 표현할 것이다.

$$\overline{s}: T \rightarrow |\mathbb{A}|$$

항에 대한 회기적인 정의는 이미 2장에서 제시되었으므로 모든 항의 집합은 다음과 같이 정의될 수 있다. v_i는 변항 집합 V의 원소이고, τ_i는 항 집합 T의 원소이다. $(\forall_{i \in \mathbb{N}})$

가. 항(term)

㉠ $\overline{s}(v_i) = s(v_i)$.

㉡ $\overline{s}(c) = c^{\mathbb{A}}$.

㉢ $\overline{s}(f\tau_1, \dots, \tau_n) = f^{\mathbb{A}}(\overline{s}(\tau_1), \dots, \overline{s}(\tau_n))$.

나. 원자식(Atomic Formula)[40]

㉠ $\mathbb{A} \vDash = \tau_1\tau_2[s]$ iff $\overline{s}(\tau_1) = \overline{s}(\tau_2)$.

: 여기서 말하는 바는 =은 $\mathbb{A}$하에서 =과 똑 같은 역할을 한다는 말이다.

㉡ 주어진 n항 술어 파라미터 P에 대해, $\mathbb{A} \vDash P\tau_1, \dots, \tau_n[s]$ iff $< \overline{s}(\tau_1), \dots, \overline{s}(\tau_n) > \in P^{\mathbb{A}}$

다. 그 외의 적형식

적형식 역시 2장에서 회기적으로 정의됐었다. 같은 방향에서 모형 역시 회기적으로 주어진다. φ와 ψ는 임의의 적형식을 나타내는 메타기호이다.

㉠ 위에서 주어진 원자식이다.

---

39) ‘Recursion’은 수학적 귀납법(Mathematical Induction)의 정의(define)적인 제시 방식으로 바라볼 수 있다. 매우 중요한 개념이나 이 글에서 설명하기에는 어려움이 있을 것 같다. Enderton, H.의 *A Mathematical Introduction to Logic,* pp34~44를 참고하라. 보다 친절한 증명은 Jech, T. and Hrbacek, K., Introduction to Set Theory, Marcel Dekkerm 1999.,pp46~51을 참고하라. 개인적으로 후자를 추천한다. 앞으로는 ‘회기적’과 ‘귀납적’ 그리고 ‘수학적 귀납법’이 모두 같은 방법을 말하는 의미로 쓰일 것이다.

40) 2장에서도 보았듯이 원자식에 대한 정의는 회기적인 방식이 아니라 완전한 정의의 방식으로 제시되었었다. 그러므로 원자식에 대한 모형 제시(만족가능성) 역시 회기적인 방식이 아닌 완전한 정의의 방식으로 제시된다. 참고로 앞으로 쓰일 ‘iff’는 ‘if and only if’의 줄임(abbreviation)이다. ‘$\Leftrightarrow$’와 동일하게 사용되는 메타기호로 생각해도 좋을 것이다.

㉡ $\mathbb{A} \vDash \neg\varphi$ iff $\mathbb{A} \nvDash \varphi[s]$.

㉢ $\mathbb{A} \vDash (\varphi \rightarrow \psi)[s]$ iff $\mathbb{A} \nvDash \varphi[s]$ 이거나 $\mathbb{A} \vDash \psi[s]$ 이거나 혹은 모두일 경우이다.

㉣ $\mathbb{A} \vDash \forall v_i \varphi[s]$ iff 모든 $d \in |\mathbb{A}|$에 대해, $\mathbb{A} \vDash \varphi[s(v_i|d)]$.

: 여기서 함수 $s(v_i|d)$는, $s(v_i|d)$: $V \rightarrow |\mathbb{A}|$이며 v_i에 한해서, 함수 s의 변항에 v_i가 들어간 값$s(v_i)$를 내어 놓는 것이 아니라 $d \in |\mathbb{A}|$값을 내어 놓는 것만 다르고 나머지 기능은 s와 같은 함수이다. 즉 v_i를 제외한 다른 변항 y에 대해서는 $s(v_i|d)(y) = s(y)$이고 $s(v_i|d)(v_i) = d$인 함수를 말한다.41)

이제 이러한 기능을 하는 함수 s의 유일성(uniqueness) 증명이 필요하다. s와 같은 기능을 하는 무수한 함수들이 s와 같은 값을 가질 경우 s만의 사용으로 축약할 수 있다는데 유일성 증명의 첫 번째 의미가 있으며 같은 기능을 하는 다른 함수의 사용으로부터 오는 애매성을 해소할 수 있다는데 두 번째 의미가 있다. 유일성 증명은 아래의 정리로부터 얻을 수 있다.

정리 4.0.1 만약 s_1와 s_2가 변항 집합 V로부터 $|\mathbb{A}|$로의 함수이고, 적형식 φ에서 자유롭게 나타나는 모든 변항에 대해 적용된다면, 다음이 인정된다.

$$\mathbb{A} \vDash \varphi[s_1] \text{ iff } \mathbb{A} \vDash \varphi[s_2]$$

증명의 방향 : 위에서 모형의 제시가 회기적으로 진행되었으므로 이 증명 역시 고정된 구조체(structure or model) $\mathbb{A}$와 모든 적형식 φ에 대해 회기적인 방식으로 진행된다. 즉 두 함수 s_1, s_2와 φ에서 자유롭게 나타나는 모든 변항에 대해 $\mathbb{A}$가 φ와 s_1을 만족시킨다면 오직 그 경우에 s_2 역시 만족시킴을 보이면 된다.

가정. 임의의 항 τ_i의 모든 변항 v_i에 대해 $s_1(v_i) = s_2(v_i)$이면, $\overline{s_1}(\tau_i) = \overline{s_2}(\tau_i)$이다.

증명. 이제 식에 대한 귀납법(Induction)을 사용한다.42)

가. 항(Term)

㉠ $\tau_i \equiv c_i$ 일 경우, $\overline{s_1}(c_i) = \overline{s_2}(c_i) = c_i$

㉡ $\tau_i \equiv v_i$ 일 경우 가정에 의해, $\overline{s_1}(v_i) = \overline{s_2}(v_i)$

㉢ $\tau_i \equiv f_{\tau_i}$ 일 경우 정의에 의해, $\overline{s_1}(\tau_i) = f^{\mathbb{A}}(\overline{s_1}(\tau_i))$

가정에 의해, $f^{\mathbb{A}}(\overline{s_2}(\tau_i)) = \overline{s_2}(\tau_i)$

나. 식(Formula)

㉠ $\varphi \equiv P_{\tau_i}$가 원자식일 때, $\mathbb{A} \vDash \varphi[s_1] \Leftrightarrow \mathbb{A} \vDash P_{\tau_i}[s_1] \Leftrightarrow P^{\mathbb{A}}(\overline{s_1}(\tau_i))$ $\cdots$ 정의에 의해

41) $s(v_i|d)$: $V \rightarrow |\mathbb{A}|$ such that s, $s(v_i|d)$ agree on $V \setminus \{v_i\}$ and $s(v_i|d)(v_i) = d$

42) 이와 같이 항에서 원자식으로 원자식에서 식의 순으로 귀납적인 증명을 진행하는 것을 ‘Routine Proof’ 혹은 ‘Routine Induction’이라 한다.

$\Leftrightarrow P^{\mathbb{A}}(\overline{s_2}(\tau_i)) \Leftrightarrow \mathbb{A} \models \varphi[s_2]$ … 가정에 의해

㉡ 임의의 원자식 ψ, χ에 대해 $\varphi \equiv \neg\psi_{\tau_i}$이면,

$\mathbb{A} \models \varphi[s_1] \Leftrightarrow \mathbb{A} \models \neg\psi_{\tau_i}[s_1] \Leftrightarrow \mathbb{A} \not\models \psi(\overline{s_1}(\tau_i))$ 혹은 $(\overline{s_1}(\tau_i)) \in \psi^{\mathbb{A}}$ … 정의에 의해

$\Leftrightarrow \mathbb{A} \not\models \psi(\overline{s_2}(\tau_i)) \Leftrightarrow \mathbb{A} \models \neg\psi_{\tau_i}[s_2] \Leftrightarrow \mathbb{A} \models \varphi[s_2]$ … 가정에 의해

㉢ $\varphi \equiv \psi \rightarrow \chi$이면,

$\mathbb{A} \models \varphi[s_1] \Leftrightarrow \mathbb{A} \models (\psi \rightarrow \chi)[s_1] \Leftrightarrow \mathbb{A} \not\models \psi[s_1]$ 혹은 $\mathbb{A} \models \chi[s_1]$ 혹은 모두

… 정의에 의해(I.P. 적용은 각 원자식에 동일하게 적용된다.)

$\Leftrightarrow \mathbb{A} \not\models \psi[s_2]$ 혹은 $\mathbb{A} \models \chi[s_2]$ 혹은 모두 … 가정에 의해

$\Leftrightarrow \mathbb{A} \models (\psi \rightarrow \chi)[s_2] \Leftrightarrow \mathbb{A} \models \varphi[s_2]$

㉣ $\varphi \equiv \forall v_i \psi$이면, s_1과s_2는 v_i를 제외한 ψ의 모든 자율변항(free variables)에 대해 적용되므로,

$\mathbb{A} \models \varphi[s_1] \Leftrightarrow$ 각각의 $d \in |\mathbb{A}|$에 대해 $\mathbb{A} \models \psi[s_1(v_i|d)]$

$\Leftrightarrow$ 각각의 $d \in |\mathbb{A}|$에 대해 $\mathbb{A} \models \psi[s_2(v_i|d)]$

$\Leftrightarrow \mathbb{A} \models \forall v_i \psi [s_2] \Leftrightarrow \mathbb{A} \models \varphi[s_2]$.

$\therefore \mathbb{A} \models \varphi[s_1]$ iff $\mathbb{A} \models \varphi[s_2]$. ⊣

정리에 의해 $\varphi = \varphi(v_1, \dots, v_n)$이고 $s(v_i) = a_i$에 대해 $\mathbb{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$를 쓰는 대신 $\mathbb{A} \models \varphi[s]$를 애매하지 않게 쓸 수 있다. 참고로 $\mathbb{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$는 φ의 변항이 $|\mathbb{A}|$의 원소로 대체되었을 때 $\mathbb{A}$에서 φ가 인정된다는 의미이다. 이제 이 정리의 따름정리(corollary)를 살펴보자.

따름정리 4.0.2 임의의 문장 φ에 대해, 다음 둘 중 하나가 인정된다.

㉠ $\mathbb{A}$가 V에서 $|\mathbb{A}|$로의 모든 함수s와 함께 φ를 만족(satisfies)시킨다. 또는

㉡ $\mathbb{A}$가 어떠한 그런 함수도 φ도 만족시키지 않는다.

㉠은 $\mathbb{A} \models \varphi[s]$를 말하며 ㉡은 $\mathbb{A} \not\models \varphi[s]$을 말한다. 어떠한 모형이 어떠한 문장$\varphi$에 대해 참과 거짓을 동시에 부여할 수 없음이란 이미 알고 있듯이 일관성(consistency)의 속성이다. 어떠한 문장 φ가 참이면서 동시에 거짓일 수 없음을 우리는 매우 직관적으로 파악한다. 아마도 그렇기 때문에 모형의 구성에서 일관성을 강조하는 일이 없는 듯하다. 바로 이 지점이 힐버트의 아이디어가 발생한 지점일 것이다. 그의 기획(program)처럼 일관적으로 구성된 형식체계에 모형을 제시한다면 그 체계 내에서 모형에 부합하는 진리치를 얻을 수 있을 것이다.

1. 형식체계의 공리와 추론 규칙

우리는 힐버트 프로그램의 4가지 요소를 말했었다. ①과 ②의 단계에서는 1차 논리의

언어가 제시되었었다. 하지만 주목할 점은 1차 논리의 언어가 형식적으로 어떻게 구성되는지에 대해서만 언급을 했었다. 이 단락에서는 형식체계의 공리(Axiom)를 제시하게 될 것이며 공리로부터 도출 가능한 메타정리(Meta-theorem)에 대해 간략한 설명을 하고 본격적으로 ④의 단계에 해당하는 건전성 정리로 들어갈 것이다.

이제 논리학의 공리를 알아보자.43) 논리적 공리의 집합을 Λ라고 하자. 그리고 적형식 φ가 ψ의 일반화(generalization)이라는 것은 어떤 $n \geq 0$과 변항 $x_1, \dots, x_n$에 대하여, 다음을 말한다.

$$\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \psi.$$

이때, 논리적 공리들은 x와 y가 변항이고 φ와 ψ가 적형식일 때, 다음의 적형식을 모두 일반화한 형태를 말한다.

(ㄱ) 동어 반복적 문장(Tautologies).

(ㄴ) $\forall x \varphi \rightarrow \varphi_\tau^x$, 여기서 항 τ는 φ의 각각의 x를 대체할 수 있다.

(ㄷ) $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi)$.

(ㄹ) $\varphi \rightarrow \forall x \varphi$, 여기서 x는 φ에서 자유롭게 나타나지 않는다.

(ㅁ) $x = x$.

(ㅂ) $x = y \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi')$, 여기서 φ는 원자식이고 φ'은 φ의 x자리를 y로 교체하여 얻은 결과이다.

이제 우리는 이 6가지 공리와 앞장에서 설명한 전건긍정의 추론규칙만을 통해 구성된 형식체계를 대상으로 할 것이다. 이 추론 규칙을 통해 공리로부터 새로운 식을 얻을 수 있으며 이러한 식들의 집합을 Γ라고 할 것이다. 그리고 $\Gamma \cup \Lambda$로부터 추론규칙을 통해 얻은 식을 Γ의 정리(theorem)라고 할 것이며 정리 φ가 $\Gamma \cup \Lambda$로부터 추론규칙을 통해 얻어졌을 때, 이를 'Γ로부터 φ의 도출(deduction)'이라고 할 것이다. 또한 우리는 무한한 공리집합 Λ를 가지는 대신 추론규칙은 하나만을 가지는 형식체계를 대상으로 할 것이다.44) 추론규칙의 수를 늘여 공리집합 Λ가 공집합이 되는 형식체계도 있음을 알아두길 바란다.45)

이제 공리(ㄱ)과 (ㄴ)에 대한 설명이 필요할 것 같다. 먼저 공리(ㄱ) 동어 반복적 문장(tautologies)에 대해 알아보자. 거칠게 말해 동어 반복적 문장이란 그 구성요소인 원자식과 양화식에 어떠한 진리치를 할당하건 간에 "참이 되는" 문장이다. 형식적으로 정의하기에 앞서 앞으로 우리는 진리치할당함수를 도입할 것인데 이 함수는 기초식(prime formula)과 비기초식(nonprime formula)을 기반으로 한다. 적형식은 다음과 같이 기초식과 비기초식으로 구별될 수 있다.

(i) 기초식이란 원자식 $P\tau_1, \dots, \tau_n$이거나 $\forall v_i \varphi$ 의 형태를 말한다.

---

43) 여기서 제시할 논리학의 공리는 힐버트가 제시한 공리와 일치하지는 않는다. 앞서 언급했듯이 Enderton, H.의 *A Mathematical Introduction to Logic*,에 기반한 6가지 공리를 제시할 것이다.

44) 6가지 공리만을 가지는 것 같지만 동어반복적 문장을 공리로 차용함에 의해 공리의 수가 무한하다고 말할 수 있을 것이다.

45) 이러한 형식체계는 다음을 참고하라. Mates. B., *Elementary logic*, Oxford University press, 1972(김영정·선우환 역, 『기호논리학』, 문화출판사, 1996)

(ii) 그 외의 것은 비기초식으로 기초식으로부터 메타함수 $\varepsilon_{\neg}$와 $\varepsilon_{\rightarrow}$에 의해 구성된 식을 말한다. 말하자면, φ_i는 기초식이거나 i보다 작은 j, k에 대해, $\varphi_i \equiv \neg\varphi_j$이거나 $\varphi_i \equiv \varphi_j \rightarrow \varphi_k$이다.

이제 형식적인 정의로 들어가자. Φ를 모든 기초식(prime formula)의 집합이라고 하고 Ψ를 모든 비기초식들의 집합으로 그리고 유일한 진리치할당함수 $v: \Phi \rightarrow \{T, F\}$를 두자. 그러면 v의 확장인 함수 $\overline{v}: \Psi \rightarrow \{T, F\}$를 둘 수 있다. 이로부터 함수 v와 $\overline{v}$의 특성을 다음과 같이 설명할 수 있다.

(i) 임의의 $\varphi \in \Phi$에 대해, $\overline{v}(\varphi) = v(\varphi)$.

(ii) $\overline{v}(\neg\varphi) = T \ \Leftrightarrow\ \overline{v}(\varphi) = F$.

(iii) $\overline{v}(\varphi \rightarrow \psi) = F \ \Leftrightarrow\ \overline{v}(\varphi) = T \wedge \overline{v}(\psi) = F$.

이제 이를 이용해 '동어반복적이다.'를 정의해 보자.

정의 4.1.1 φ가 동어반복적이다. $\Leftrightarrow$ $\forall v: \Phi \rightarrow \{T, F\}$에 대해, $\overline{v}(\varphi) = T$.

또한 우리는 진리치할당함수의 사용을 통해 만족가능성 역시 정의할 수 있다.

정의 4.1.2 진리치할당함수 v가 적형식 φ를 만족시킨다. $\Leftrightarrow$ $\overline{v}(\varphi) = T$.

위와 같은 정의를 통해 독자는 이미 동어반복적인 식이 타당함을 직관적으로 파악했으리라 생각한다. 이제 "모든 동어반복적 식은 타당하다."라는 명제를 증명해 보자.

정리 4.1.3 모든 동어반복적 식은 타당하다.

증명의 방향 : 만약 임의의 적형식 φ가 동어반복적일 경우, 임의의 $\mathbb{M}$과 $s: x \rightarrow |\mathbb{M}|$ (여기서 x는 변항, $x \in V$)에 대하여 $\mathbb{M} \vDash \varphi[s]$임을 보이면 된다.

주어진 $\mathbb{M}$과 $s: x \rightarrow |\mathbb{M}|$ 그리고 진리 할당함수 $v: \Phi \rightarrow \{T, F\}$에 대하여 정의에 의해 다음이 주어진다. $v(\psi) = T \ \Leftrightarrow\ v$가 적형식 ψ를 만족시킨다. $\Leftrightarrow$ $\mathbb{M} \vDash \psi[s]$. 그러므로 정의 4.1.1에 의해 다음과 같은 등식 역시 얻을 수 있다. $\overline{v}(\psi) = T \ \Leftrightarrow$ 임의의 $\mathbb{M}, s$에 대해, $\mathbb{M} \vDash \psi[s] \ \Leftrightarrow\ \psi$가 타당하다. 이제 본격적인 증명을 위한 요소를 살펴보자. 임의의 기초식의 나열 $\varphi_0 \cdots \varphi_n$를 φ로 축약하면 φ는 동어반복적이라고 했으므로 $\overline{v}(\varphi) = T$이다. 그러면 최종적으로 타당성 증명을 위해 다음의 두 가지 사항을 고려해야 한다.

(i) 회기적인 방식과 함께 $\varphi \equiv \neg\psi$일 경우.

(ii) 회기적인 방식과 함께 $\varphi \equiv \psi \rightarrow \chi$일 경우.

(i)과 (ii)에서 ψ와 χ는 모두 임의의 $\mathbb{M}, s$에 대해, $\mathbb{M} \vDash \psi[s], \chi[s]$이면 오직 그 경우에 $\overline{v}(\psi) = T$이고 $\overline{v}(\chi) = T$이다. 즉 타당하다.

증명. 임의의 $\mathbb{M}, s$에 대해,

(i) $\mathbb{M} \vDash \neg\psi[s] \ \Leftrightarrow\ \overline{v}(\psi) = F \ \Leftrightarrow\ \overline{v}(\neg\psi) = T \ \Leftrightarrow\ \overline{v}(\varphi) = T \ \Leftrightarrow\ \mathbb{M} \vDash \varphi[s]$.

$$
\begin{aligned}
(ii)\ \mathbb{M} \vDash (\psi \to \chi)[s] \ &\Leftrightarrow \ \mathbb{M} \vDash \neg\psi[s] \text{ or } \mathbb{M} \vDash \chi[s] \\
&\Leftrightarrow \neg(\neg\mathbb{M} \vDash \neg\psi[s] \text{ and } \neg\mathbb{M} \vDash \chi[s]) \\
&\Leftrightarrow \neg(\mathbb{M} \vDash \psi[s] \text{ and } \mathbb{M} \vDash \neg\chi[s]) \\
&\Leftrightarrow \neg(\overline{v}(\psi) = T \text{ and } \overline{v}(\chi) = F) \Leftrightarrow \neg(\overline{v}(\psi \to \chi) = F) \\
&\Leftrightarrow \overline{v}(\psi \to \chi) = T \Leftrightarrow \mathbb{M} \vDash \varphi[s] \qquad \dashv
\end{aligned}
$$

정리 4.1.3의 증명에 의해 모든 동어반복적 식이 타당함을 알 수 있다. 주목할 것은 타당하지만 동어 반복적이지 않은 경우가 있다. 예를 들어 $\forall x(Px \to Px)$와 $\forall xPx \to Pa$의 경우 타당한 문장이나 동어 반복적이지는 않다. 동어반복적 문장이란 타당한 문장 중에서, 연결사의 의미론적 속성(양화사의 의미론적 속성과 대조되는 것으로서의)에 의해서 타당하게 되는 문장을 말하기 때문에 이들 문장은 타당하나 동어반복적 문장이 되지 않는 것이다.

이제 공리㈁에 대해 알아보자. ㈁의 φ^x_τ 는 다음과 같이 설명될 수 있다.

가. φ^x_τ란 φ에서 각각 자유롭게 나타나는 x를 항 τ로 대체(substitute)한 것을 말한다. φ^x_τ를 회기적으로 정의해 보자. 항u에 대한 u^x_τ는 다음과 같이 정의된다.

(i) 상항 c에 대해, $c^x_\tau = c$이다. 변항 y에 대해, $y = \begin{cases} \tau & \text{if } x = y \\ y & \text{if } \textit{otherwise}. \end{cases}$

(ii) $fu_1, \dots, u_n$에 대해, $(fu_1, \dots, u_n)^x_\tau = f(u_1)^x_\tau, \dots, (u_n)^x_\tau$.

이제 정식 φ^x_τ를 회기적으로 정의하면 다음과 같다.

(i) 원자식 $P_{\tau_1, \dots, \tau_n}$에 대해, $(P_{\tau_1, \dots, \tau_n})^x_\tau = P(\tau_1)^x_\tau \cdots (\tau_n)^x_\tau$.

(ii) $(\neg\varphi)^x_\tau = (\neg\varphi^x_\tau)$; $(\varphi \to \psi)^x_\tau = (\varphi^x_\tau \to \psi^x_\tau)$.

(iii) $(\forall y\varphi)^x_\tau = \begin{cases} \forall y\varphi & \text{if } x = y \\ \forall y(\varphi^x_\tau) & \text{if } x \neq y \end{cases}$

다음으로 특수한 경우를 알아보자.

나. x가 φ에서 자유롭게 나타나고 φ^x_τ에서 $\forall y$에 의해 속박되는 y를 가진 τ가 있을 때, τ는 x를 대체할 수 없다. 형식적으로 다음과 같이 설명할 수 있다.

(i) 원자식 φ에 대해, τ는 φ의 x를 항상 대체가능하다.

(ii) τ로 $\neg\varphi$의 x를 대체가능하다. $\Leftrightarrow$ τ로 φ의 x를 대체가능하다.

; τ로 $\varphi \to \psi$의 x를 대체가능하다. $\Leftrightarrow$ τ로 φ, ψ 모두에 있는 x를 대체가능하다.

(iii) τ로 $\forall y\,\varphi$의 x를 대체가능하다. $\Leftrightarrow$ x가 $\forall y\varphi$에서 자유롭게 나타나지 않거나 y가 τ에 없고 τ로 φ의 x를 대체가능하다.

건전성 정리를 위해서는 위의 6가지 공리가 모두 타당함을 증명해야 하는데 이는 다음 단락에서 본격적으로 제시하도록 하겠다. 우리가 다루는 형식체계는 추론 규칙을 하나만 제시하는 대신 6가지 공리로부터 몇 가지 메타 정리를 끌어낼 수 있는데 이 글에서는 건전성 정리에 필요한 몇 가지 사항만 소개하고 넘어가도록 하겠다. 각각의 메타 정리는 앞 정리나

정의로부터 증명되며 이들의 의미는 각 정리 이후의 증명 혹은 건전성 및 완전성 정리 증명을 통해서 확인할 수 있을 것이다.

정의 4.1.4 φ가 $\psi_1, \dots, \psi_n$의 동어반복적 귀결이다. $\Leftrightarrow$ 임의의 진리치할당함수 $v: \Phi \to \{T, F\}$에 대해, 만약 $\bar{v}(\psi_1) = \cdots = \bar{v}(\psi_n) = T$이면 $\bar{v}(\varphi) = T$이다.

정리 4.1.5 만약 φ가 $\psi_1, \dots, \psi_n$의 동어반복적 귀결이면, $\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \vDash \varphi$ 이다.

증명. φ가 $\psi_1, \dots, \psi_n$의 동어반복적 귀결임을 가정.

㉠ 정의4.1.4에 의해 만약 $\bar{v}(\psi_1) = \cdots = \bar{v}(\psi_n) = T$이면 $\bar{v}(\varphi) = T$이다.

㉡ $\bar{v}(\psi_1) = \cdots = \bar{v}(\psi_n) = T$이면 정리 4.1.3에 의해 임의의 $\mathbb{M}$과 $s: x \to |\mathbb{M}|$에 대해, $\mathbb{M} \vDash \psi_i[s]$ $(i = 1, \dots, n)$이다.

㉢ $\mathbb{M} \vDash \psi_i[s]$ $(i = 1, \dots, n)$이면, 정의 4.1.4와 가정에 의해 $\mathbb{M} \vDash \varphi[s]$ 이다.

㉣ 그러므로, $\mathbb{M} \vDash \psi_i[s] \to \varphi[s]$이고 이는 $\vDash \psi_i[s] \to \varphi[s]$이다.

$\therefore$ $\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \vDash \varphi$ $\dashv$

규칙 T $\Gamma \vdash \psi_1, \dots, \psi_n$이고 φ가 $\psi_1, \dots, \psi_n$의 동어반복적 귀결이면 $\Gamma \vdash \varphi$ 이다.

증명의 방향 : (i) $\psi_1 \to (\psi_2 \to \cdots \to (\psi_n \to \varphi))$가 동어반복적이면 이는 형식체계의 논리적 공리이므로 $\Gamma \vdash \psi_1 \to (\psi_2 \to \cdots \to (\psi_n \to \varphi))$이다.

(ii) $\Gamma \vdash \psi_1, \dots, \psi_n$이므로 $\Gamma \vdash \varphi$ 이다.

증명. (i) φ가 $\psi_1, \dots, \psi_n$의 동어반복적 귀결임을 가정. $1 < k \leq n$인 $k, n \in \mathbb{N}$에 대해,

㉠ $\alpha_1 \equiv \psi_n \to \varphi$

㉡ $\alpha_{k \leq n} \equiv \psi_{n-(k-1)} \to \alpha_{k-1}$

이면, $\bar{v}(\psi_n) = \bar{v}(\varphi) = T$이고 이는 $\bar{v}(\psi_n \to \varphi) = \bar{v}(\alpha_1) = T$이다. 같은 방법으로 $\bar{v}(\psi_{n-1}) = \bar{v}(\alpha_1) = T$이고 이는 $\bar{v}(\psi_{n-1} \to \alpha_1) = \bar{v}(\alpha_2) = T$이다. 그러므로 수학적 귀납법에 의해, $\bar{v}(\alpha_n) = T$이다.

$\therefore$ $\bar{v}(\psi_1 \to (\psi_2 \to \cdots \to (\psi_n \to \varphi))) = T$이고 정의 4.1.1.에 의해 $\psi_1 \to (\psi_2 \to \cdots \to (\psi_n \to \varphi))$가 동어반복적이다.

(ii) (i)에 의해 우리는 $\Gamma \vdash \psi_1 \to (\psi_2 \to \cdots \to (\psi_n \to \varphi))$를 얻는다. $\Gamma \vdash \psi_1, \dots, \psi_n$이므로 $\Gamma \vdash \psi_1$와 전건긍정법에 의해 $\Gamma \vdash \psi_2 \to \cdots \to \psi_n \to \varphi$를 얻고 $\Gamma \vdash \psi_{n-1}$과 전건긍정법에 의해 $\Gamma \vdash \psi_n \to \varphi$를 얻는다. 마지막으로 $\Gamma \vdash \psi_n$에 의해 $\Gamma \vdash \varphi$를 얻는다.

$\therefore$ $\Gamma \vdash \varphi$ $\dashv$

규칙 T의 따름정리. $\Gamma \vdash \varphi \;\Leftrightarrow\; \varphi$가 $\Gamma \cup \Lambda$의 유한한 부분집합의 동어반복적 귀결이다.[46)]

이제 공리(ㄴ)과 관련된 보조 정리를 알아보자.

보조정리 4.1.6 $\overline{s}(y^{\,x}_{\,\tau}) = \overline{s(x|\overline{s}(\tau))}(u)$.

증명. 항 u에 대한 귀납 원리를 통해 증명할 수 있다.

(i) u가 상항이거나 $u \neq x$일 경우, $u^{x}_{\tau} = u$ 이다. 그러므로 $\overline{s}(u) = \overline{s}(u)$

(ii) $u = x$이면, $u^{x}_{\tau} = \tau$ 이므로 $\overline{s}(\tau) = \overline{s}(\tau)$이다.

$\therefore$ $\overline{s}(y^{\,x}_{\,\tau}) = \overline{s(x|\overline{s}(\tau))}(u)$. ⊣

보조정리 4.1.7 φ의 x를 τ가 대체가능할 경우 임의의 $\mathbb{M}$과 $s: V \to |\mathbb{M}|$에 대해 다음이 성립한다.

$$\mathbb{M} \vDash \varphi^{\,x}_{\,\tau}[s] \;\Leftrightarrow\; \mathbb{M} \vDash \varphi[s(x|\overline{s}(\tau))].$$

증명. φ에 대한 귀납의 원리를 통해 모든 s에 대해 위가 만족함을 보이면 된다.

(i) φ가 원자식일 경우, $\varphi \equiv Pu_1, \ldots, u_n$

$$\begin{aligned}\mathbb{M} \vDash \varphi^{x}_{\tau}[s] &\Leftrightarrow \mathbb{M} \vDash Pu_1, \ldots, u_n[s] \Leftrightarrow (\overline{s}(u_1{}^{x}_{\tau}), \ldots, \overline{s}(u_n{}^{x}_{\tau})) \in P^{\mathbb{M}} \\ &\Leftrightarrow \overline{s(x|\overline{s}(\tau))}(u_1, \ldots, u_n) \in P^{\mathbb{M}} \quad \cdots \text{ 보조정리 4.1.6에 의해} \\ &\Leftrightarrow \mathbb{M} \vDash Pu_1, \ldots, u_n[s(x|\overline{s}(\tau))] \Leftrightarrow \mathbb{M} \vDash \varphi[s(x|\overline{s}(\tau))]\end{aligned}$$

(ii) $\varphi \equiv \neg \psi_{u_1 \ldots u_n}$

$$\begin{aligned}\mathbb{M} \vDash \varphi^{x}_{\tau}[s] &\Leftrightarrow \mathbb{M} \vDash (\neg \psi_{u_1 \ldots u_n})^{x}_{\tau}[s] \Leftrightarrow (\overline{s}(u_1{}^{x}_{\tau}), \ldots, \overline{s}(u_n{}^{x}_{\tau})) \notin \psi^{\mathbb{M}} \\ &\Leftrightarrow \overline{s(x|\overline{s}(\tau))}(u_1, \ldots, u_n) \notin \psi^{\mathbb{M}} \Leftrightarrow \mathbb{M} \vDash \neg \psi_{u_1 \ldots u_n}[s(x|\overline{s}(\tau))] \\ &\Leftrightarrow \mathbb{M} \vDash \varphi[s(x|\overline{s}(\tau))]\end{aligned}$$

(iii) $\varphi \equiv \psi \to \theta$

$$\begin{aligned}\mathbb{M} \vDash \varphi^{x}_{\tau}[s] &\Leftrightarrow \mathbb{M} \vDash (\psi \to \theta)^{x}_{\tau}[s] \Leftrightarrow \mathbb{M} \vDash \neg\psi^{x}_{\tau}[s] \text{ or } \mathbb{M} \vDash \theta^{x}_{\tau}[s] \text{ or } \textit{both} \\ &\Leftrightarrow \mathbb{M} \vDash \neg\psi[s(x|\overline{s}(\tau))] \text{ or } \mathbb{M} \vDash \theta[s(x|\overline{s}(\tau))] \text{ or } \textit{both} \\ &\Leftrightarrow \mathbb{M} \vDash (\psi \to \theta)[s(x|\overline{s}(\tau))] \\ &\Leftrightarrow \mathbb{M} \vDash \varphi[s(x|\overline{s}(\tau))]\end{aligned}$$

(iv) $\varphi \equiv \forall \psi$, 여기서 x는 φ에 자유롭게 나타나지 않는다.

x가 φ에 자유롭게 나타나지 않으므로, φ에서 자유롭게 나타나는 모든 변항에 대해 s와 $s(x|\overline{s}(\tau))$가 같으므로,

46) 이로부터 $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \exists_{finite}\, \Gamma' \subseteq \Gamma,\, \Gamma' \vdash \varphi$를 알 수 있다.

$\mathbb{M} \vDash \varphi^x_\tau[s] \Leftrightarrow \mathbb{M} \vDash (\forall y \psi)^x_\tau[s] \Leftrightarrow \mathbb{M} \vDash \forall y \psi[s] \Leftrightarrow \mathbb{M} \vDash \varphi[s]$

$\Leftrightarrow \mathbb{M} \vDash \forall y \psi[s(x|\overline{s}(\tau))] \Leftrightarrow \mathbb{M} \vDash \varphi[s(x|\overline{s}(\tau))]$

(v) $\varphi \equiv \forall \psi$, 여기서 x는 φ에 자유롭게 나타난다.

$x = y$의 경우는 ㈑에 해당하므로 $x \neq y$의 경우만 생각하면 될 것이다. φ의 x는 τ로 대체가능하므로, 대체가능성의 정의에 의해 y는 τ에서 자유롭게 나타날 수 없다. 그리고 ψ의 x는 τ로 대체가능하다. 그러므로 임의의 $d \in |\mathbb{M}|$에 대해, $\overline{s}(\tau) = \overline{s(y|d)}(\tau)$가 성립하고 $x \neq y$이므로 $\varphi^x_\tau = \forall y \psi^x_\tau$가 성립한다.

$\mathbb{M} \vDash \varphi^x_\tau[s] \Leftrightarrow \mathbb{M} \vDash (\forall y \psi)^x_\tau[s] \Leftrightarrow$ 임의의 d에 대해, $\mathbb{M} \vDash \psi^x_\tau[s(y|d)]$

$\Leftrightarrow$ 임의의 d에 대해, $\mathbb{M} \vDash \psi[s(y|d)(x|\overline{s}(\tau))]$ $\cdots$ $\overline{s}(\tau) = \overline{s(y|d)}(\tau)$

$\Leftrightarrow \mathbb{M} \vDash \varphi[s(x|\overline{s}(\tau))]$

$\therefore$ φ에 대한 귀납의 원리를 통해 모든 s가 $\mathbb{M} \vDash \varphi^x_\tau[s] \Leftrightarrow \mathbb{M} \vDash \varphi[s(x|\overline{s}(\tau))]$를 만족한다. $\dashv$

정의 4.1.9 Γ가 비일관적이라는 것은 어떤 γ에 있어, $\Gamma \vdash \neg\gamma$, γ라는 것이다. Γ가 일관적이라는 것은 Γ가 비일관적이지 않다는 것이다.

연언정리(Deduction)와 그 역 $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

증명. $(\Rightarrow)$ 수학적 귀납법(Induction)에 의해, 임의의 $\psi \in \Gamma \cup \{\varphi\}$에 대해 식 $(\varphi \rightarrow \psi)$가 Γ로부터 도출가능함을 보이면 된다.

(i) $\psi = \varphi$인 경우, 자연스럽게 $\vdash (\varphi \rightarrow \psi)$이다.

(ii) $\psi \in \Lambda$이거나 $\psi \in \Gamma$인 경우, $\Gamma \vdash \psi$ 이고 ψ는 $(\varphi \rightarrow \psi)$를 동어반복적 함축하므로 규칙T에 의해 $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$이다.

(iii) ψ가 χ와 $\chi \rightarrow \psi$로부터 전건긍정에 의해 얻어졌다면, $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \chi$이므로 ㉠, ㉡에 의해 $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \chi)$이고 $(\chi \rightarrow \psi)$는 $(\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi))$를 동어반복적 함축하므로 $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi))$이다. 집합$\{\varphi \rightarrow \chi, \varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)\}$는 $\varphi \rightarrow \psi$를 동어반복적 함축하므로 규칙 T에 의해 $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$이다.

$(\Leftarrow)$ $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$를 가정하면, $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$가 가능하고 $\{\varphi, \varphi \rightarrow \psi\} \in \Gamma \cup \{\varphi\}$이므로 $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$이다.

$\therefore$ $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. $\dashv$

보조정리 4.1.10 (대우법, Contraposition) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg\varphi$.

증명. $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg\varphi$. $\dashv$

보조정리 4.1.11 (귀류법, Reductio ad Absurdum) $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$는 비일관적이다.

증명. ($\Leftarrow$) $\Gamma \vdash \varphi$라 가정하면, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi, \neg\varphi$ 이므로 $\Gamma\{\neg\varphi\}$가 비일관적이다.

($\Rightarrow$) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$는 비일관적이라 가정하면, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi,\ \neg\varphi$이다.

$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi,\ \neg\psi \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\Gamma \vdash \neg\varphi \to \psi}_{*}$ 이고 $\Gamma \vdash \neg\varphi \to \neg\psi$ 이다.

$\Gamma \vdash \neg\varphi \to \neg\psi \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\Gamma \vdash \psi \to \varphi}_{**}$ 이므로 $_{*}$와 $_{**}$에 의해 $\Gamma \vdash \varphi$ 이다. ⊣

정리 4.1.12 (일반화정리, Generalization Theorem) 만약 $\Gamma \vdash \varphi$이고 x가 Γ에서 자유롭지 않다면, $\Gamma \vdash \forall x\varphi$이다.

증명의 방향 : 주어진 Γ에 대해, x가 Γ에서 자유롭지 않으며 $S = \{\varphi | \Gamma \vdash \forall x\varphi\}$라 할 때, S가 $\Gamma \cup \Lambda$와 전건긍정에 닫혀있는 문장들의 집합을 포함47)한고 하면 귀납정리에 의해 $\Gamma \vdash \varphi$ 이면 $\varphi \in S$이고 이는 $\Gamma \vdash \forall x\varphi$를 보임으로써 증명할 수 있다.

증명. (i) $\varphi \in \Lambda$ 일 경우, $\forall x\varphi \in \Lambda$ 이므로 이는 $\varphi \in S$ 이고 그러므로 $\Gamma \vdash \forall x\varphi$이다.

(ii) $\varphi \in \Gamma$ 일 경우, ㈃ 공리에 의해 $\varphi \to \forall x\varphi$ 이므로 $\forall x\varphi \in \Gamma$이고 $\varphi \in S$ 이며 위와 같이 $\Gamma \vdash \forall x\varphi$이다.

(iii) $\varphi, \varphi \to \psi \in S$라 가정하면, 이는 $\Gamma \vdash \forall x\varphi$이고 $\Gamma \vdash \forall x(\varphi \to \psi)$라는 말이므로 ㈂ 공리 $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$와 전건긍정법에 의해 $\psi \in S$ 이고 $\Gamma \vdash \forall x\psi$이다.

$\therefore \Gamma \vdash \forall x\varphi$ ⊣

정리 4.1.13 (상항일반화정리, Generalization on constants) $\Gamma \vdash \varphi$이고 c가 Γ에서 나타나지 않는다고 가정하자. $<\varphi_0, \dots, \varphi_n>$를 Γ로부터 $\varphi(=\varphi_n)$의 도출(deduction)이라고 하고 y를 φ_i에 나타나지 않은 변항이라고 하면, $<(\varphi_0)^c_y, \dots, (\varphi_n)^c_y>$ 역시 Γ로부터의 도출이다. 그러므로 $\Gamma \vdash \forall y\varphi^c_y$이고 Γ에 나타나지 않는 c에 대해 Γ로부터 $\forall y\varphi^c_y$의 도출이 있다.

증명의 방향 : 각 $(\varphi_i)^c_y$가 $\Gamma \cup \Lambda$와 전건긍정에 닫혀있는 문장들의 집합에 포함되어 있음을 보이면 된다.

증명. $j < k < i \leqq n$에 대해,

(i) $\varphi_i \in \Gamma$ 일 경우, c가 φ_i에서 자유롭게 나타나지 않았으므로 $(\varphi_i)^c_y = \varphi_i \in \Gamma$ 이다.

$\therefore \Gamma \vdash \forall y\varphi^c_y$

(ii) $\varphi_i \in \Lambda$일 경우.

㈀ 동어반복적 문장.

; φ_i 동어 반복적 문장일 경우, c가 φ_i에서 자유롭게 나타나지 않았으므로

47) $\Gamma \cup \Lambda$ 와 전건긍정에 닫혀있는 문장들의 집합이 S 의 부분집합이라면.

$(\varphi_i)^c_y = \varphi_i \in \Lambda$이다.

(ㄴ) $\forall x \varphi \rightarrow \varphi^x_\tau$

; $\varphi_i \equiv \forall x \alpha \rightarrow \alpha^x_\tau$라하고 $x \neq y$라 하면 $(\varphi_i)^c_y \equiv \forall x (\alpha)^c_y \rightarrow (\alpha^x_\tau)^c_y$임을 알 수 있다. α를 각 상황에 맞게 변형한 것이다. 괄호 속은 α에 있는 변항 혹은 상항이 어떻게 변화하는지를 보인 것이다.

$\alpha \quad (\underline{\quad x \quad c})$ … 여기서 x는 α에서 자유롭다.

$\alpha^x_t \quad (\underline{\quad \tau \quad c})$

$(\alpha^x_\tau)^c_y (\underline{\quad \tau^c_y \quad y})$ … *

$\alpha^c_y \quad (\underline{\quad x^c_y \quad y})$ … 여기서는$x \neq y$

$(\alpha^c_y)^x_{\tau^c_y} (\underline{\quad \tau^c_y \quad y})$ … **

위를 통해 $x \neq y$이고 *와 **로부터 $(\alpha^x_\tau)^c_y \equiv (\alpha^c_y)^x_{\tau^c_y}$임을 알 수 있다.

$\therefore \ (\varphi_i)^c_y \equiv \forall x (\alpha)^c_y \rightarrow (\alpha^c_y)^x_{\tau^c_y}$ $\in$ 공리(ㄴ)

$\therefore \ (\varphi_i)^c_y = \varphi_i \in \Lambda$

(ㄷ) $\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi)$.

; $\alpha_i \equiv \forall x (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi)$라 할 때, c와 y가 α_i에서 자유롭게 나타나지 않았으므로 $x = y$이거나 $x \neq y$인 모든 경우에 $(\alpha_i)^c_y = \alpha_i \in \Lambda$이다.

(ㄹ) $\varphi \rightarrow \forall x \varphi$, 여기서 x는 φ에서 자유롭게 나타나지 않는다.

; $\alpha_i \equiv \varphi \rightarrow \forall x \varphi$라 하면 c, x, 그리고 y가 α_i에서 자유롭게 나타나지 않으므로 $(\alpha_i)^c_y = \alpha_i \in \Lambda$이다.

(ㅁ) $x = x$.

; $x \neq c$, $x = c$, 그리고 $x = y$의 모든 경우에 성립한다.

(ㅂ) $x = y \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi')$, 여기서 φ는 원자식이고 φ'은 φ의 x자리를 y로 교체하여 얻은 결과이다.

; $\alpha_i \equiv x = z \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi')$라고 하면, c와 y가 α_i에서 자유롭게 나타나지 않아야 하므로 $z \neq c$이고 $z \neq y$이다. 그러므로 $(\alpha_i)^c_y = \alpha_i \in \Lambda$이다.

$\therefore$ 각각의 경우, $(\alpha_i)^c_y = \alpha_i \in \Lambda$이면, 일반화정리에 의해 $(\forall x \alpha_i)^c_y = \forall x (\alpha_i)^c_y \in \Lambda$

이므로 $\Lambda \vdash \forall y \varphi^{c}_{y}$임을 알 수 있다.

(iii) φ_i가 φ_j, φ_k로부터 전건긍정에 의해 도출되었을 경우, c와 y가 φ_i, φ_j, 그리고 φ_k에서 자유롭게 나타나지 않았으므로 $(\varphi_i)^c_y$도 역시 $(\varphi_j)^c_y$, $(\varphi_k)^c_y$로부터 전건긍정에 의해 도출될 수 있다. 그러므로 $(\varphi)^c_y = \varphi \in \Gamma$이다.

$\therefore$ 각각의 경우에 일반화정리에 의해 $\Gamma \vdash \forall y \varphi^{c}_{y}$임을 알 수 있다.

이제 마지막으로 동일성 기호에 대한 언급을 하고 넘어가야겠다. 우리가 사용하는 1차 논리의 언어는 동일성 기호를 차용하기 때문에 이것이 어떻게 작용하는지에 대한 언급은 필수적이다.

동일성 정리(Equality Theorem) 동일성 기호 ‘=’는 다음과 같은 특징을 지닌다.

(i) $\vdash x = x$

증명. 공리 ㈒으로부터 바로 얻을 수 있다.

(ii) $\vdash x = y \to y = x$

증명. $\vdash x = y \to x = x \to y = x$ … 공리 ㈓에 의해

$\vdash x = x$ … 공리 ㈒에 의해

$\therefore \vdash x = y \to y = x$ … 규칙 T에 의해

(iii) $\vdash x = y \to y = z \to x = z$

증명. $\vdash y = x \to (y = z \to x = z)$ … 공리 ㈓에 의해

$\vdash x = y \to y = x$

$\therefore \vdash x = y \to y = z \to x = z$ … 규칙 T에 의해

(iv) $\vdash x_1 = y_1 \to \cdots \to x_n = y_n \to (\alpha \to \alpha')$, 여기서 α와 α'는 원자식이고 α'는 α의 x_i를 y_i로 대체한 식이다.

증명. $\{x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n, \alpha(x_1, \ldots, x_n)\} \vdash \alpha(y_1, \ldots, y_n)$을 보이면 된다.

$\vdash x_1 = y_1 \to \alpha(x_1, \ldots, x_n) \to \alpha(y_1, x_2, \ldots, x_n)$

$\vdash x_2 = y_2 \to \alpha(y_1, x_2, \ldots, x_n) \to \alpha(y_1, y_2, x_3, \ldots, x_n)$

$\vdash x_n = y_n \to \alpha(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n) \to \alpha(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n)$

$\therefore \vdash x_1 = y_1 \to \cdots \to x_n = y_n \to (\alpha \to \alpha')$

보조정리 4.1.15 Δ를 식들의 집합으로 할 때, 다음이 정의 된다. $\tau_1 \sim \tau_2 \Leftrightarrow \Delta \vdash \tau_1 = \tau_2$. 그러면 ㉠ $\sim$은 모든 항의 집합에서 동일성 관계를 성립하고 $\tau_1 \sim u_1, \cdots, \tau_n \sim u_n$을 가정하면 다음이

성립한다. ㉡ 임의의 n항 술어 R에 대해, $\Delta \vdash R_{\tau_1, \dots, \tau_n} \Leftrightarrow R_{u_1, \dots, u_n}$이 성립하고 ㉢ 임의의 n항 함수 f에 대해, $\Delta \vdash f_{\tau_1, \dots, \tau_n} = f_{u_1, \dots, u_n}$ (이는 $f_{\tau_1, \dots, \tau_n} \sim f_{u_1, \dots, u_n}$)이다.48)

증명. 공리㈥으로부터 손쉽게 이끌어낼 수 있다.

이 이외에도 몇 가지의 메타 정리들이 있다. 나머지 정리들은 독자의 관심에 맡긴다.49) 이제 건전성 정리로 들어가자.

2. 건전성 정리(Soundness Theorem)

지금까지 형식체계가 가지는 6가지 공리와 그로부터 이끌어져 나오는 몇 가지 메타정리에 대해 알아보았다. 이번 단락에서는 형식체계로부터 도출가능한 식이 타당함을 확인할 것이다. 이쯤에서 힐버트 프로그램의 ④를 다시 한 번 상기해 보자.

> ‘유한한 계산을 통해 확인된 고전수학의 진술과 일치하는 그러한 식이 공리 및 이전 식으로부터 추론규칙을 통해 증명될 수 있다. ⇔ 그 진술이 참이다.’

앞에서 언급한 ④는 위와 같이 재해석 가능할 것이다. ‘고전수학의 진술’이라는 말에 대해 의아해 할 수도 있는데 우리가 제시한 1차 논리의 언어는 집합론에서 사용하는 2항 술어 기호 ‘∈’ 및 정수론에서 사용되는 2항 술어 기호 ‘<’, 상항 기호 ‘0’, 1항 함수 기호 ‘S’(successor function), 2항 함수 기호 ‘+’(addition), ‘•’(multiplication) 그리고 ‘E’(exponentiation) 등을 포함할 수 있는 언어이다. 그러므로 우리가 위에서 제시한 형식체계의 공리와 추론규칙을 통해서도 ④의 증명을 제시할 수 있는 것이다. 이 단락에서 소개할 건전성 정리는 위의 왼쪽을 전제로 ‘그 진술이 참이다.’를 끌어내는 것이다. 그럼 이제 본격적으로 증명으로 들어가 보자.

형식체계가 건전하다고 하는 것은 형식체계의 공리로부터 추론규칙들의 적용에 의해 도출된 어떠한 결론도 그 결론이 의존하고 있는 전제들의 동어반복적 귀결이다라고 말하는 것이다. 간단히 말해 우리가 가진 형식체계가 오직 올바른 결론을 이끌어 낸다고도 해석할 수 있다. 구문론적 개념인 $\Gamma \vdash \varphi$를 전제로 의미론적인 개념인 $\Gamma \vDash \varphi$를 끌어내는 것이 우리가 증명할 내용이다.

건전성 정리(Soundness Theorem) $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash \varphi$.

---

48) 여기서 $f_{t_1, \dots, t_n} = f_{u_1, \dots, u_n}$의 경우는 원자식(Atomic formula)이다. 하지만 $R_{t_1, \dots, t_n} \leftrightarrow R_{u_1, \dots, u_n}$의 경우는 원자식이 아니라 식(Formula)이다. $R_{t_1, \dots, t_n}$와 $R_{u_1, \dots, u_n}$가 하나의 원자식이고 문장연결기호 ‘↔’에 의해 식이된다.

49) 이 글에서는 논리적 공리 ㈀과 ㈁에 중점을 두었다. 완전성 정리 증명을 하는데 있어 ‘동어반복적 귀결’ 개념과 ‘대체가능’ 개념이 다른 공리보다 중요하다고 생각했기 때문이다. 나머지 정리에 관해서는 다음을 참고하라. Enderton, H., *A Mathematical Introduction to Logic*, HARCOURT/ACADEMIC PRESS, 1972(second edition 2001), pp116~128.

증명의 방향 : (i) 형식체계의 논리적 공리가 모두 타당하다.
(ii) Γ로부터 도출된 φ가 Γ로부터의 동어반복적 귀결이다.

증명. (i) 형식체계의 논리적 공리가 모두 타당하다.
임의의 $\mathbb{M}$과 $s: V \to |\mathbb{M}|$에 대해,
(ㄱ) 모든 동어 반복적 문장(Tautologies)이 타당하다. … 정리 4.1.3

(ㄴ) $\mathbb{M} \vdash \forall x\varphi \to \varphi^x_\tau \Rightarrow \mathbb{M} \vDash \forall x\varphi \to \varphi^x_\tau$

증명(ㄴ). 연언정리의 역에 의해 $\mathbb{M} \vdash \forall x\varphi \to \varphi^x_\tau$는 $\mathbb{M} \cup \{\forall x\varphi\} \vdash \varphi^x_\tau$이므로 $\mathbb{M} \cup \{\forall x\varphi\} \vDash \varphi^x_\tau$를 증명하면 될 것이다. 우선 φ의 x를 τ로 대체할 수 있음과 $\mathbb{M} \vDash \forall\varphi[s]$를 가정하자. 그렇다면 이는 임의의 $d \in |\mathbb{M}|$에 대해, $\mathbb{M} \vDash \varphi[s(x|d)]$이다. 이때 $d = \overline{s}(\tau)$라고 하면, $\mathbb{M} \vDash \varphi[s(x|\overline{s}(\tau))]$이므로 보조정리 4.1.7에 의해$\mathbb{M} \vDash \varphi^x_\tau[s]$이다. 그러므로 $\mathbb{M} \cup \{\forall x\varphi\} \vDash \varphi^x_\tau$이고 이는 $\mathbb{M} \vDash \forall x\varphi \to \varphi^x_\tau$이다.

∴ 공리 (ㄴ)이 타당하다.

(ㄷ) $\mathbb{M} \vdash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi) \Rightarrow \mathbb{M} \vDash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$

증명(ㄷ). 위와 같은 이유에서 $\mathbb{M} \cup \{\forall x(\varphi \to \psi), \forall x\varphi\} \vDash \forall x\psi$를 증명하면 될 것이다. $\{\forall x(\varphi \to \psi), \forall x\varphi\} \nvDash \forall x\psi$이게 하는 모형 $\mathbb{N}$이 있다고 가정하자. 그러면 $\mathbb{N}$은 함수 $s': V \to |\mathbb{N}|$과 함께 $\mathbb{N}$이 $\forall x(\varphi \to \psi)$와 $\forall x\varphi$를 만족시키지만 $\forall x\psi$은 만족시키지 않은 그러한 모형이된다. 그러면 정의에 의해, $\mathbb{N} \nvDash \psi[s'(x|g)]$이게 하는 $g \in |\mathbb{N}|$가 존재한다. 그리고 마찬가지로 $\underline{\mathbb{N} \vDash \varphi \to \psi[s'(x|g)]}$<u>이고</u> $\underline{\mathbb{N} \vDash \varphi[s'(x|g)]}$<u>임</u>$_{(*)}$을 알 수 있다. 만족가능성 정의에 의해 $\mathbb{N} \vDash \varphi \to \psi[s'(x|g)] \Leftrightarrow \mathbb{N} \nvDash \varphi[s'(x|g)]$ or $\mathbb{N} \vDash \psi[s'(x|g)]$이고 앞 가정에 의해 $\mathbb{N} \nvDash \psi[s'(x|g)]$이므로 $\mathbb{N} \nvDash \varphi[s'(x|g)]$이다. 그리고 이는 (*)에 모순이다. 그러므로 $\{\forall x(\varphi \to \psi), \forall x\varphi\} \nvDash \forall x\psi$이게 하는 모형이 없다.

∴(ㄷ)은 타당하다.

(ㄹ) $\mathbb{M} \vdash \varphi \to \forall x\varphi \Rightarrow \mathbb{M} \vDash \varphi \to \forall x\varphi$, x는 φ에서 자유롭게 나타나지 않는다.

증명(ㄹ). x가 φ에서 자유롭게 나타나지 않을 경우 $\mathbb{M} \cup \{\varphi\} \vDash \forall x\varphi$임을 증명하면 된다. 위 (ㄷ)증명과 같은 방식으로 x가 φ에서 자유롭게 나타나지 않을 경우 $\{\varphi\} \nvDash \forall x\varphi$이게 하는 모형 $\mathbb{N}$이 있다고 가정하자. 그러면 $\mathbb{N}$은 함수 $s': V \to |\mathbb{N}|$과 함께 $\underline{\mathbb{N} \vDash \varphi[s']}$<u>이지만</u> $\underline{\mathbb{N} \nvDash \forall x\varphi[s']}_{(**)}$인 모형이 된다. 그리고 정의에 의해 $\mathbb{N} \nvDash \varphi[s'(x|g)]$이게하는 $g \in |\mathbb{N}|$ 값이 존재한다. x는 φ에서 자유롭게 나타나지 않으므로 $s'(x|g)$와 s'는 값이 같다. 이에의해 $\mathbb{N} \nvDash \varphi[s'(x|g)] \Leftrightarrow \mathbb{N} \nvDash \varphi[s'(x)]$가 성립하고 이는 (**)에 모순이다. 그러므로 x가 φ에서 자유롭게 나타나지 않을 경우 $\{\varphi\} \nvDash \forall x\varphi$이게 하는 모형이

없다.

∴ ㈃은 타당하다.

㈄ $\mathbb{M} \vdash x = x \Rightarrow \mathbb{M} \vDash x = x$

증명㈄. 이는 당연하다. $\mathbb{M}$은 $x = x$를 만족시키며 또한 $s(x) = s(x)$는 항상 참이므로 공리 ㈄은 타당하다.

㈅ $\mathbb{M} \vdash x = y \to (\varphi \to \varphi') \Rightarrow \mathbb{M} \vDash x = y \to (\varphi \to \varphi')$, φ는 원자식이고 φ'은 φ의 x 자리를 y로 교체하여 얻은 결과이다.

증명㈅. 함수 $s' : V \to |\mathbb{N}|$와 함께 다음을 만족하는 모형이 있다고 가정하자, $\mathbb{N} \nvDash x = y \to (\varphi \to \varphi')$. 정의에 의해 $\mathbb{N} \vDash x = y[s']$와 $\mathbb{N} \nvDash \varphi \to \varphi'[s']$를 얻는다. 또한 $\mathbb{N} \vDash x = y[s']$로부터 $\underline{s'(x) = s'(y)}_{(*)}$를 얻는다. $\mathbb{N} \nvDash \varphi \to \varphi'[s']$는 정의에 의해 $\mathbb{N} \vDash \varphi[s']$이고 $\mathbb{N} \nvDash \varphi'[s']$이므로 이로부터 $\underline{s'(x_i) \in \varphi^{\mathbb{N}}\text{이고}}$ $\underline{s'(y_i) \notin \varphi^{\mathbb{N}}}_{(**)}$를 얻을 수 있다. (*)과 (**)는 서로 모순이다. 그러므로 그러한 모형이 없다.

∴ ㈅은 타당하다. ⊣

∴ 형식체계의 논리적 공리가 모두 타당하다.

증명. (ii) Γ로부터 도출된 φ가 Γ로부터의 동어반복적 귀결이다.

㉠ φ가 논리적 공리일 경우 (i)에 의해 $\vDash \varphi$ 이므로 $\Gamma \vDash \varphi$ 이다.

㉡ $\varphi \in \Gamma$일 경우, 당연히 $\Gamma \vDash \varphi$이다.

㉢ 마지막으로 추론규칙(전건긍정)에 의해 이끌어져나온 식φ가 $\Gamma \vDash \varphi$이면 된다. $\Gamma \vDash \psi$와 $\Gamma \vDash \psi \to \varphi$를 가정하자. 그러면 Γ와 주어진 함수 $s : V \to |\Gamma|$에 대해 $\Gamma \vDash \psi[s]$와 $\Gamma \vDash \psi \to \varphi[s] \Leftrightarrow \Gamma \nvDash \psi[s]$ or $\Gamma \vDash \varphi[s]$을 얻는다. $\Gamma \vDash \psi[s]$이므로 추론규칙에 의해 우리는 $\Gamma \vDash \varphi[s]$를 얻을 수 있다.

∴ Γ로부터 도출된 φ가 Γ로부터의 동어반복적 귀결이다. ⊣

∴ $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash \varphi$. ⊣

건전성 정리 증명이 끝났다. 이제 건전성 정리의 보조정리를 알아보자.

보조정리4.2.1 Γ가 만족가능하면, Γ는 일관적이다.

증명. Γ가 만족가능하다고 가정하자. 그러면 Γ의 모든 원소 φ를 만족시키는 모형 $\mathbb{M}$과 함수 $s : V \to |\mathbb{M}|$가 존재한다. 귀류법을 적용하여 Γ가 비일관적이라고 가정하자. 그러면 정의에 의해 $\Gamma \vdash \psi, \neg\psi$이다. 건전성 정리를 적용하여 이는 $\Gamma \vDash \psi, \neg\psi$이므로 우리는 $\Gamma \vDash \psi[s]$와 $\Gamma \vDash \neg\psi[s]$를 동시에 갖는다. 하지만 이는 불가능하다. 그러므로 Γ가 일관적이다.

∴ Γ가 만족가능하면, Γ는 일관적이다.

이제 남은 것은 반대방향인 완전성정리(Completeness Theorem)이다. 다음 장에서는 괴델의 완전성 정리를 소개할 것인데 괴델 그 자신의 증명 보다는 헨킨(Leon Henkin)에 의해 정제된 방식으로 증명을 제시할 것이다.

V. 괴델의 완전성 정리(Gödel's Completeness Theorem)

괴델(Kurt Gödel)의 완전성 정리는 단순히 건전성 정리의 반대방향이라고 생각할 수도 있겠지만 그 정리가 함축하고 있는 바를 생각할 때, 그 중요성은 당연히 완전성 정리에 있다고 할 수 있을 것이다. 논리학에 있어서 완전성 정리의 의미는 다음 장에서 언급하도록 하겠다. 이제 증명으로 들어가자.

1. 도입

형식체계가 완전하다고 하는 것은 형식체계의 추론규칙을 이용하여 어떤 주어진 식들의 집합으로부터 그 집합의 어떠한 귀결도 도출할 수 있다고 말하는 것이다. 다음은 완전성 정리와 그와 동치인 정리이다.

정리 5.1.1 (완전성 정리, Completeness Theorem) $\Gamma \vDash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$

정리 5.1.2 Γ가 일관적이면, Γ가 만족가능하다.

먼저 본격적인 완전성 정리에 들어가기에 앞서 정리 5.1.1과 5.1.2가 동치임을 증명할 것이다. 위 두 정리가 동치임을 보이는 것은 일관적인 식들의 집합인 Γ가 모형을 가짐을 보임으로써 완전성 정리를 마칠 수 있음을 의미한다. 그럼 이제 이것의 증명을 시작하자.

필요 증명 $\Gamma \vDash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$이면 오직 그 경우에, Γ가 일관적이면, Γ가 만족가능하다.

증명. ($\Rightarrow$) $\Gamma \vDash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$와 Γ가 일관적임을 가정하자. 그리고 귀류법에 의해 Γ가 만족가능하지 않음을 가정하면 $\Gamma \vDash \varphi, \neg\varphi$이다. $\varphi, \neg\varphi$를 만족시키는 Γ가 없으므로 Γ는 φ도 $\neg\varphi$도 끌어낼 수 있다. 그렇다면 가정에 의해 $\Gamma \vdash \varphi, \neg\varphi$이다. 이는 가정에 모순이다. 그러므로 Γ는 만족 가능하다.

$\therefore$ $\Gamma \vDash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$이면 Γ가 일관적일 때, Γ가 만족가능하다.

증명. ($\Leftarrow$) Γ가 일관적이면, Γ가 만족가능하다와 $\Gamma \vDash \varphi$를 가정하자. 그러면 Γ의 모든 원소 φ를 만족시키는 모형 $\mathbb{M}$과 함수 $s : V \to |\mathbb{M}|$가 존재한다. 즉 $\mathbb{M} \vDash \varphi[s]$이다. 그러면 전제에 의해 $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$의 원소들은 $\mathbb{M}$에 의해 만족가능하지 않다. (말하자면, $\mathbb{M} \nvDash \neg\varphi[s]$이면서 $\mathbb{M} \vDash \neg\varphi[s]$이다.) 전제의 대우 형식에 의해 Γ가 만족가능하지 않으면 Γ가 일관적이지 않으므로 $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$는 비일관적이다. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$가 비일관적이므

로 $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi, \neg\varphi$이다. 그러므로 $\Gamma \vdash \varphi$이다.

∴ Γ가 일관적이면, Γ가 만족가능하다이면 $\Gamma \vDash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$이다.

∴ $\Gamma \vDash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$이면 오직 그 경우에, Γ가 일관적이면, Γ가 만족가능하다. $\dashv$

이제 대략적인 스케치를 해보자. 일관적인 체계가 모형을 가짐을 보이기 위해 먼저 우리는 일관적인 집합을 구성할 것이다. 직관적으로 생각해보자. 어떠한 체계가 일관적이라고 하더라도 그 체계에 반하는 요소가 하나라도 들어올 경우 그 체계는 비일관적이 된다. 그렇기 때문에 우리는 임의의 식 α에 대해, Δ는 $\alpha \in \Delta$이거나 $\neg\alpha \in \Delta$이고 둘 모두는 인정되지 않는 집합을 구성할 것이다. 그리고 다음으로 만약 $\varphi \notin \Delta$이고 $\neg\varphi \notin \Delta$일 경우 임의의 $\Gamma_{\subseteq \Delta}$에 대해 $\Gamma \vdash \varphi$이거나 $\Gamma \vdash \neg\varphi$인 Γ가 존재하지 않는다. 즉 도출 자체가 불가능한 상황을 제거하기 위해 (일관적이면서) 최대(Maximal) 집합을 구성하는 것이다. 이런 의미에서 우리는 최대 일관적인 집합(maximal consistency set)을 구성할 것이다. 그리고 우리가 대상으로 하는 언어는 셈이 가능한(countable) 정도의 기호의 나열로 구성된 언어를 대상으로 할 것이다. 무한히 나열된 기호로 구성된 언어라고 하더라도 셈이 가능한 무한(countable infinite)을 언급하는 것임에 주의하기 바란다.[50] 먼저 최대 일관적인 집합을 구성하기 위해 린덴바움 보조정리(Lindenbaum's lemma)와 헨킨 보조정리(Henkin's lemma)를 살펴보자.

2. 린덴바움 보조정리와 헨킨 보조정리[51]

우선 일관적인 집합 Γ를 상정하고 이 Γ를 최대로 확장시켜 최대 일관적인 집합 Δ를 구성할 것이다. 완전성 정리를 위해 우리가 구성할 집합은 다음과 같은 속성을 가진다.

(i) $\Delta = \cup\{\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}$, 즉 $\Gamma \subseteq \Delta$

(ii) 임의의 식 α에 대해, Δ는 $\alpha \in \Delta$이거나 $\neg\alpha \in \Delta$를 가지는 최대일관적인 집합이다.

(iii) 임의의 식 φ와 변항 x에 대해 $(\exists x\, \varphi \rightarrow \varphi^x_c) \in \Delta$인 상항 c가 있다.[52]

(ii)는 집합 Δ에 일관성을 해하지 않는 원소만을 받아들인다는 의미이고 (iii)에서 $(\exists x\, \varphi \rightarrow \varphi^x_c)$와 같은 문장이 Δ에 속함을 언급하는 이유는 최대일관적인 집합을 구성한 이후, 모형을 구성하는 과정에서 매우 유용하게 쓰이기 때문이다. 상항 c가 φ나 전체 문장에 전혀 나타나지 않은 새로운 상항임을 숙지하여 일반화 작업에 있어 혼동이 없길 바란다.

---

50) 거칠게 말해 셈이 가능하다는 말은 대상을 1열로 나열했을 때, 각 대상에게 1부터 n까지의 수를 부여해 순서를 정할 수 있다는 말이다. 무한히 많은 대상도 자연수 개수만큼 있다면 수를 부여해 순서를 정할 수 있으나 실수 개수 만큼일 경우 수와 수 사이에 무한한 요소들이 있어 수를 부여해 순서를 정할 수 없다.

51) 이 부분의 증명은 Shapiro, S.,[2000] "Classical Logic", *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, http://plato.stanford.edu/.과 Shoenfield, J. R., *Mathematical Logic*, Association for Symbolic Logic and A K Peters, Natick, Massachusetts, 2000. First published by Addison-Wesley in 1967.를 참고하였다.

52) 이 글에서 우리가 사용하는 언어에 '$\exists$'는 제시되지 않았으나 2장 4절에서 '$\exists x\alpha \equiv (\neg\forall x(\neg\alpha))$'임이 소개 되었으므로 편의상 '$\neg\forall x\neg$' 대신, '$\exists$'를 쓰도록 할 것이다. 그리고 Enderton에서는 '임의의 식 φ와 변항 x에 대해 $(\neg\forall x\varphi \rightarrow \neg\varphi^x_c) \in \Delta$인 상항 c가 있다.'로 제시되었으나 '$(\exists x\, \varphi \rightarrow \varphi^x_c) \in \Delta$'를 사용할 경우 '알파벳 변형 정리(Existence of Alphabetic Variants)'를 사용하지 않아도 되는 편리함이 있으므로 '$(\exists x\, \varphi \rightarrow \varphi^x_c) \in \Delta$'를 사용하도록 할 것이다.

(i)과 (ii)의 단계는 일반적으로 린덴바움 정리(Lindenbaum Theorem)에 의해 그 속성이 증명된다. 그리고 헨킨에 의해 제시된 $(\exists x \varphi \rightarrow \varphi_c^x) \in \Delta$가 최대 일관적인 집합 Δ에 충족될 경우 ((iii)을 충족할 경우) 이미 가지고 있던 상항 a와 새로 도입되는 상항 c간에 $a=c$와 같은 관계가 성립된다면 동일성 기호(equality sign)에 대한 해석 제시가 문제가 된다. 그러므로 헨킨 보조정리에 대한 설명 이후 동일성 기호와 관련된 몇 가지 개념을 설명하고 Δ에 대한 모형을 제시하도록 할 것이다. 이렇게 완전성 정리는 "Γ가 일관적이면, Γ가 만족가능하다."에 대한 증명을 제시함으로써 이루어진다. 이제 본격적인 증명으로 들어가 보자.53) 이 과정 역시 앞쪽의 보조정리가 뒤의 보조정리를 증명하는데 사용된다.

린덴바움 보조정리(Lindenbaum's Lemma) 임의의 $\mathcal{L}$-식($\mathcal{L}$-formula)의 일관적인 집합 Γ를 가정하면, 이 Γ는 $\mathcal{L}$-식($\mathcal{L}$-formula)의 최대 일관적인 집합 Δ로 확장할 수 있다.(말하자면, Δ가 일관적이고 임의의 $\mathcal{L}$-식 φ에 대해, $\varphi \in \Delta$이거나 $\neg\varphi \in \Delta$이다.)

필요 증명. 증명을 위해 우리는 다음의 (i), (ii)를 증명해야 한다.

(i) Δ가 일관적이다.
(ii) Δ가 최대일관적이다. (말하자면, $\alpha \not\in \Delta$이고 $\{\alpha\} \cup \Delta$가 일관적인 α가 존재하지 않는다.)

증명에 앞서 $\Delta = \cup\{\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}$라고 하자 그리고 Γ_i는 다음과 같이 회기적(recursive)으로 정의된다.

$$\Gamma_0 = \Gamma$$

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \alpha_n & \text{만약 } \Gamma_n \text{와 } \alpha_n \text{가 일관적일 경우.} \\ \Gamma_n & \text{그 이외의 경우.} \end{cases}$$

증명. (i) Δ가 일관적이다.

필요증명. 만약 Γ_n가 일관적이면, Δ는 일관적이다.

가정. Γ_n가 일관적이면서, Δ가 비일관적이다.

가정에 의해 $\exists\alpha$, $\Delta \vdash \alpha$이면서 $\Delta \vdash \neg\alpha$이다. $\alpha, \neg\alpha \in \Delta$이므로, $\alpha, \neg\alpha \in \Delta'$인 그러한 유한한 집합 $\Delta' \subseteq \Delta$이 있다.
$\therefore$ $\Delta' \vdash \alpha$이고 $\Delta' \vdash \neg\alpha$이다.

Δ'가 유한한 집합이므로 $\exists n$, $\forall_{\varphi \in \Delta'} \varphi \in \Gamma_n$이다. 그러므로 $\alpha, \neg\alpha \in \Gamma_n$ 이고 이는 $\Gamma_n \vdash \alpha$이면서 $\Gamma_n \vdash \neg\alpha$라는 의미이므로 이는 Γ_n가 일관적이라는 가정에

53) 이 글에서의 증명은 문장 집합들이 유한하거나 셀 수 있는 무한 집합임(countable infinite)을 가정할 것이다. 물론, 셀 수 없는 무한(uncountable infinite)인 경우 역시 가능하나 이 경우 집합론의 개념인 Zorn's lemma가 사용되기 때문에 이는 생략하기로 한다.

모순이다.
$\therefore$ $\varDelta$는 일관적이다.

증명. (ii) $\varDelta$가 최대일관적이다.

필요증명. $\alpha \notin \varDelta$이고 $\{\alpha\} \cup \varDelta$가 일관적인 α가 존재하지 않는다.

가정. $\exists\alpha$, $\alpha \notin \varDelta$이고 $\{\alpha\} \cup \varDelta$가 일관적이다.
$\alpha = \alpha_m$라 하면, $\alpha_m \notin \varDelta$일 경우 $\alpha_m \notin \varGamma_{m+1}$이다. 정의에 의해 이는 $\{\alpha_m\} \cup \varGamma_m$가 비일관적임을 말한다. $\varGamma_m$은 일관적이라 가정했으므로 다시 정의에 의해 $\neg\alpha_m \in \varGamma_m$이다. $\varGamma_m \subseteq \varDelta$이므로, 만약 $\neg\alpha_m \in \varGamma_m$이면 $\neg\alpha_m \in \varDelta$이다. $\varDelta$도 일관적이었으므로 $\varDelta \cup \{\alpha_m\} \vdash \alpha_m, \neg\alpha_m$임을 알 수 있다. 그러므로 $\varDelta \cup \{\alpha_m\}$는 비일관적이며 이는 가정에 모순이다.

$\therefore \neg\exists\alpha, \alpha \notin \varDelta$이면서 $\{\alpha\} \cup \varDelta$는 일관적이다.
$\therefore \varDelta$는 최대일관적인 집합니다. $\dashv$

보조정리 5.2.1 $\varGamma$를 $\mathcal{L}$-식들의 일관적인 집합이라 하고 $\mathcal{L}'$을 $\mathcal{L}$과 새로 도입되는 상항기호(new constant symbols) c의 집합($\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_i | i < \mathbb{N}\}$ 여기서, $c_i \notin \mathcal{L}$)이라 하면, $\varGamma$는 $\mathcal{L}'$에서도 일관적이다.

증명.

가정. 어떤 $\mathcal{L}'$-식 α'에 대해, $\varGamma \vdash_{\mathcal{L}'} \alpha' \wedge \neg\alpha'$라 하면,
상항일반화정리에 의해, $\varGamma \vdash \forall y(\alpha' \wedge \neg\alpha')^c_y$를 얻는다. 이때 $\alpha'^c_y = \alpha$라 하면, $\varGamma \vdash \forall y(\alpha \wedge \neg\alpha)$임을 알 수 있고 $\forall y(\alpha \wedge \neg\alpha)$에는 어떠한 새로운 상항 c도 있지 않음으로, $\varGamma \vdash_{\mathcal{L}} \forall y(\alpha \wedge \neg\alpha)$이고 이는 $\mathcal{L}$에 모순이다. ($\forall y(\alpha \wedge \neg\alpha)$이 $\mathcal{L}$-식이므로)
$\therefore$ $\varGamma$는 $\mathcal{L}'$에서도 일관적이다.

보조정리 5.2.2 $\varGamma$를 $\mathcal{L}$-식들의 일관적인 집합이라 하면, 임의의 변항 x와 상항 $d \notin \mathcal{L}$에 대해 $\varGamma^x_d = \{\varphi^x_d | \varphi \in \varGamma\}$도 일관적이다.

증명. $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup \{d_i | i \leq \mathbb{N}\}$, $d_i \notin \mathcal{L}$라 할 때,

가정. $\varGamma$가 $\mathcal{L}$에서 일관적이면서 $\varGamma^d_x$가 $\mathcal{L}_1$.에서 비일관적이다.
그러면, $\varGamma \vdash_{\mathcal{L}_1} \varphi^x_d \wedge \neg\varphi^x_d$이고 상항일반화정리에 의해, $\varGamma \vdash_{\mathcal{L}} \forall y(\varphi^x_d \wedge \neg\varphi^x_d)^d_y$이다.(여기서 $y \notin \varphi^x_d$.) 그러므로 $\varGamma$는 $\mathcal{L}$에서 비일관적이고 이는 가정에 모순이

다.

$\therefore\ \Gamma^{x}_{d}$도 역시 일관적이다.

헨킨 보조정리(Henkin's Lemma) Γ를 $\mathcal{L}$-식들의 일관적인 집합이라 하고 새로운 상항들의 무한 집합을 $\mathbb{C}$[54]에 대해, $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \mathbb{C}$라 하자. 그러면 임의의 $\mathcal{L}'$-식 φ와 임의의 변항 x에 대해 $\exists x\varphi \rightarrow \varphi^{x}_{c} \in \Delta$인 새로운 상항 c가 있고 $\exists x\varphi \rightarrow \varphi^{x}_{c} \in \Gamma$인 $\mathcal{L}'$-식의 집합 Γ를 포함하는 일관적인 집합 Δ^{*}가 있다.

증명을 위해 이에 대한 종속정리를 짚고 넘어가자.

종속정리(Sublemma) Γ가 $\mathcal{L}$에서 일관적이고, φ가 $\mathcal{L}$-식이면서 $c\,(\in \mathcal{L})$가 $\Gamma \cup \{\varphi\}$에 있지 않으면, $\Gamma \cup \left\{\exists x\varphi \rightarrow \varphi^{x}_{c}\right\}$는 일관적이다.

증명.

가정. $\Gamma \cup \left\{\exists x\varphi \rightarrow \varphi^{x}_{c}\right\}$가 비일관적이다.

정리 4.1.11(귀류법정리)에 의해 $\Gamma \vdash \neg(\exists x\varphi \rightarrow \varphi^{x}_{c})$이고 규칙T에 의해 $\Gamma \vdash \exists x\varphi_{*} \wedge \neg\varphi^{x}_{c}$이다. 여기서 $\neg\varphi^{x}_{c}$에 대한 상황일반화 정리에 의해 $\Gamma \vdash \forall x(\neg\varphi^{x}_{c})_{**}$를 얻는다. 그러면 $_{*}$, $_{**}$가 모순이다.

$\therefore\ \Gamma \cup \left\{\exists x\varphi \rightarrow \varphi^{x}_{c}\right\}$ 는 일관적이다. $\dashv$

여기서 $\mathcal{L}$이 셈이 가능한 집합이라면 $\mathcal{L}'$ 역시 셈이 가능한 집합(각주 52참고)이므로 $\exists x\varphi$ (예를 들어 $\exists x_1\varphi_1, \exists x_2\varphi_2, \ldots$)와 같은 형식의 $\mathcal{L}'$-식들은 셈이 가능한 정도의 형태로만 구성된다. 그렇다면 다음을 만족하는 $\Gamma = \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \cdots$ 나열(sequence)을 구성할 수 있다.

(i) Γ_n은 $\mathcal{L}'$에서 일관적이다.

(ii) φ_0는 Γ_n내에서 오직 유한한 개수의 상항만을 가진다.

(iii) $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \left\{\exists x_n\varphi_n \rightarrow \varphi_{n}{}^{x_n}_{c_n}\right\}$.

수학적 귀납법에 의해 우선 $n=0$ 일 때, 보조정리 5.2.1에 의해 (i), (ii), (iii)를 만족한다.

가정. n에서 (i), (ii), (iii)이 만족한다.

n에서 (i), (ii), (iii)이 만족한다면, (ii)에 의해 φ가 유한한 상항을 가지므로 $c_{n+1} \not\in \Gamma_n \cup \left\{\varphi_{n+1}\right\}$인 c_{n+1}이 존재한다. 그리고 종속정리에 의해 Γ_{n+1}가 일관적

54) 여기서 $\mathbb{C}$ 집합의 크기(cardinal)는 $\kappa = Card(\mathcal{L}) + \omega$이다.

이므로 (i), (ii), (iii)이 $n+1$에서 만족한다. 이때, $\Delta^* = \bigcup_{n\in\omega}\Gamma_n$[55)]라고 하면 Δ^*의 모든 유한한 부분집합들은 특정(some) Γ_k에 의해 얻어진다. 이제 여기서 린덴바움 보조정리에 의해 Δ^*가 일관적임을 알 수 있다.[56)]

$\therefore\ \Delta^*$ 는 일관적이다. $\dashv$

린덴바움 보조정리와 헨킨 보조정리가 증명되었다. 이제 린덴바움 보조정리와 헨킨 보조정리를 만족하는 일관적인 집합 Γ를 상정해 본격적인 완전성 정리 증명을 시작해 보자. 이제 완전성 정리는 최종적으로 $\mathcal{L}$의 모형 $\mathbb{M}$(말하자면 $\mathbb{M}\vDash\Gamma[s]$)을 구성하는 것으로 완결될 수 있다.

앞의 정리에서와 같이 우리는 Γ를 $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}\cup\{d_i \mid i<\omega\}$(여기서, $d_i \not\in \mathcal{L}$)에 있는 문장들의 일관적인 집합으로 상정하자. 그러면 보조정리 5.2.2를 통해 Γ의 각 자율변항 v_i를 d_i로 대체한 Γ'이 $\mathcal{L}_1$에서 일관적임을 알 수 있고 이로부터 Γ'이 $\mathcal{L}_1$-문장의 집합임을 알 수 있다. 즉 각 식의 빈자리(변항)를 d_i로 채움으로써 이를 문장으로 만드는 것이다. 문장은 참이거나 거짓인 진리치를 할당 받을 수 있으므로 모형을 제시할 수 있는 당위성이 획득될 수 있다. 이제 $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_1\cup\{c_i \mid i<\kappa\}$(여기서 $c_i \not\in \mathcal{L}, \kappa = |\mathcal{L}|+\omega$)라 하면, 린덴바움 보조정리와 헨킨 보조정리에 의해, $\mathcal{L}'$에서 $(\exists x\varphi\rightarrow\varphi^x_c)\in\Delta$인 $\mathcal{L}'$-식들의 최대일관적인 집합 $\Delta_{\supseteq\Gamma'}$가 있음을 알 수 있다.[57)] 남은 것은 동일성 정리와 '$\exists x\varphi\rightarrow\varphi^x_c$' 문장의 속성을 이용해 Δ에 모형 $\mathbb{M}$을 구성하는 것이다.

3. 완전성 정리 증명

이제 Δ의 모형 $\mathbb{M}$을 구성함으로써 완전성 정리 증명을 마칠 수 있다. 모형 구성 전에 먼저 언급해야 할 것은 동일성 기호에 대한 것이다. 우리는 2장 3절에서부터 동일성 기호를 논리기호로 약속했었고 4장 0절에서 $\mathcal{L}$하에서의 동일성 기호에 대한 모형 제시와 4장 1절에서 동일성 정리를 통해 이에 대한 규칙을 제시했었다. 하지만 만약 어떠한 상항 τ에 대해, $\tau=\tau$일 경우는 공리 ㈅에 의해 손쉽게 Δ의 모형 $\mathbb{M}$이 구성되나 $\tau_1=\tau_2$와 같이 서로 다른 상항이 '=' 양 옆에 제시될 경우는 이들을 왜 같다고 해야 하는지 그 이유가 제시되어야 한다. 예를 들어 일상언어에서 2, $I\!I$, 二가 같다고 할 때, 이들은 모두 같은 수 2를 의

55) $\exists x\varphi\rightarrow\varphi^x_c\in\Gamma_n$ 이므로 $\exists x\varphi\rightarrow\varphi^x_c\in\Delta^*$임을 알 수 있다.

56) 일반적인 셀 수 없는 $\mathcal{L}_1$의 경우는 초한귀납(Transfinite Induction)을 통해 제시될 수 있다.

57) 이는 '임의의 $\mathcal{L}'$-식 φ에 대해, $\varphi\in\Delta$이거나 $\neg\varphi\in\Delta$이고 둘 모두인 경우는 아니고 임의의 $\exists x\varphi$ 형태의 $\mathcal{L}'$-식들에 대해 $(\exists x\varphi\rightarrow\varphi^x_c)\in\Delta$를 만족하는 $c\in\mathcal{L}'$가 있다.'는 의미이다. 여기까지가 Enderton 책의 Step 3이다. Enderton 책에서는 $\Delta=\{\varphi \mid \overline{v}(\varphi)=T\}$를 통해, 즉 진리치할당 함수를 통해 참 값을 가지는 원소를 Δ를 모았었다. 여기의 증명에서는 모든 식의 자율변항 v_i를 d_i로 채워 문장으로 만든다. 특수한 경우(거짓말 쟁이 역설 등)를 제외하고는 문장에 진리치 할당을 할 수 있으므로 이러한 방식을 채택하는 것이다. 적어도 이 부분에 있어 Enderton의 방식이 간소화되어 보이긴 하겠지만 근본적인 Δ의 문장 구성을 보여준다는 측면에서 자율변항을 채우는 방식이 더욱 바람직하다 생각한다.

미(혹은 지시)하기 때문에 이들은 같다는 말이 성립할 수 있다. 이렇게 형식체계에서도 서로 다른 상항일 경우에도 불구하고 같은 지시대상(혹은 의미)를 가질 경우, 이들을 '='로 표현할 수 있음에 대한 장치가 필요한 것이다. 이러한 장치로 우리는 동치집합(Equivalent Class)을 사용할 것이다. 예를 들어, 서로 다른 상항 2, II, 二 등에 대해 동치집합 $[2]$를 상항 2가 가지는 의미(혹은 지시대상)를 공유하는 상항 2를 포함한 다른 모든 상항 II, 二 들의 집합으로 제시한다면 $II=[2]$와 같이 사용함으로써 서로 다른 상항 간의 동일성 기호 적용에 대한 해석을 제시할 수 있게 된다. 이제 동치집합에 대한 설명을 위해 이항 술어 $\sim$를 도입하여 '동치(equivalence)' 개념 및 몇 가지 정의를 살펴보자.58)

정의 5.3.1 $\sim$를 항들의 집합 $T_{\subseteq \mathcal{L}'}$에서의 이항술어로 놓으면, $\sim$가 T에서 동치임을 나타내는 것은 다음을 만족할 때 이다. 임의의 $\tau_1, \tau_2, \tau_{3} {}_{\in T}$에 대해,

(i) $\tau_1 \sim \tau_1$.

(ii) $\tau_1 \sim \tau_2 \Rightarrow \tau_2 \sim \tau_1$.

(iii) $\tau_1 \sim \tau_2 \Rightarrow \tau_2 \sim \tau_3 \Rightarrow \tau_1 \sim \tau_3$.

정의 5.3.2 이항술어 $\sim$가 $T_{\subseteq \mathcal{L}'}$에서 동치임을 나타내고 $\tau \in T$일 때, $\sim$에 따른 동치집합(The equivalence class of a modulo $\sim$)은 다음과 같이 정의된다.

$$[\tau]_{\sim} = \{x \in T \mid x \sim \tau\}.$$

정의 5.3.3 $\sim$가 $T_{\subseteq \mathcal{L}'}$에서 동치임을 나타낼 때, $\sim$에 따른 모든 동치집합의 체계(system)는 $\tau / \sim$으로 나타내어진다. 그러므로 이는 $\tau / \sim = \{[\tau]_{\sim} \mid \tau \in T\}$이다.

증명을 위해 필요한 정의가 끝났다. 이제 $|\mathbb{M}| = \tau / \sim_{\Delta} = \{[\tau]_{\sim} \mid \tau \in T\}$이라 하면 동일성 정리에 의해, 임의의 $\tau_1, \tau_2 \in T$에 대해, $\tau_1 \sim \tau_2$ iff $\tau_1 = \tau_2$ iff $\Delta \vdash \tau_1 = \tau_2$가 성립한다. 그리고 동일성 정리에 의해 다음 역시 성립한다.

(i) $f_{\tau_{1,\dots,}\tau_n} = f_{u_{1,\dots,}u_n} \in \Delta$ iff $f_{\tau_{1,\dots,}\tau_n} \sim f_{u_{1,\dots,}u_n}$.

(ii) 만약 $\tau_n \sim u_n$이면, $P_{\tau_{1,\dots,}\tau_n} \in \Delta$ iff $P_{u_{1,\dots,}u_n} \in \Delta$.

게다가, $[\tau] \sim [u]$ iff $\tau = u \in \Delta$ iff $[\tau] = [u]$

동일성 기호에 대한 정의를 마쳤으니 다음 보조정리를 통해 본격적으로 $\mathcal{L}'$에 대한 모형을 제시하도록 하자.

보조정리 5.3.1 자유변항 $x_1, \dots, x_n$와 항 $\tau_i \in T$ 중의 하나 혹은 하나 이상을 가지고 있는 임의의 $\mathcal{L}'$-식 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$에 대해, $s : v \to \tau / \sim$이고 $\bar{s}$: $Terms \to \tau / \sim$이면 다음을 만

58) 동치집합(Equivalence class)에 대한 설명 및 분할(Partitions)에 대한 설명은 다음을 참고하라. Jech, T. and Hrbacek, K., *Introduction to Set Theory*, Marcel Dekkerm 1999, pp29~32.

족한다.

$$\varphi(\tau_1, \dots, \tau_n) \in \Delta \text{ iff } \varphi^{x_1}_{\tau_1}, \dots, \varphi^{x_n}_{\tau_n} \in \Delta$$
$$\text{iff } \mathbb{M} \vDash \varphi(x_1, \dots, x_n)[[\tau_1], \dots, [\tau_n]].$$
$$\text{iff } \mathbb{M} \vDash \varphi[s] \text{ 여기서 } s(x_i) = [\tau_i](i = 1, \dots, n).$$

증명은 항에서 식으로 위가 성립함을 보임으로써 이루어진다.

증명.

가. 항

; 자유변항 $x_1, \dots, x_n$중의 하나 혹은 그 이상을 가지는 임의의 항 τ(여기서 $\tau(x_1, \dots, x_n)$는 닫혀있을 필요 없다.)가 있다면, $\overline{s}(\tau) = [\tau(\tau_1, \dots, \tau_n)] \equiv [\tau^{x_1}_{\tau_1}, \dots, \tau^{x_n}_{\tau_n}]$ 이고 여기서 $s(x_i) = [\tau_i]$이다.[59]

항 단계 증명. $\tau = v_i$ 이거나 c일 경우,

(i) 상항 $c \in \mathcal{L}'$에 대해, 만약 $\tau = c$이면 $c^{\mathbb{M}} = [c]$이다.

(ii) 함수 $f \in \mathcal{L}'$와 닫힌 항 τ_i에 대해,

$\overline{s}$의 정의에 의해, $\overline{s}(f\tau) = f^{\mathbb{M}}(\overline{s}(\tau)) = f^{\mathbb{M}}([\tau(\tau_1, \dots, \tau_n)]) = [f\tau(\tau_1, \dots, \tau_n)]$.

(이는 $f^{\mathbb{M}}(\overline{s}(\tau)) = f^{\mathbb{M}}([\tau_1], \dots, [\tau_n]) = [f\tau_1, \dots, \tau_n]$.를 말한다.)

이제 원자식 단계 증명으로 들어가자, 위에서 동일성 기호의 원리에 대해 $\sim$와 같은 2항 술어로 정의했으므로 이를 고려해 2항 술어의 경우에서 모형을 제시하도록 한다. 아래 증명에서 $u(\tau_1, \dots, \tau_n)$ 부분을 빼더라도 증명 자체에는 문제가 없을 것이다.

나. 원자식

$$P\tau(\tau_1, \dots, \tau_n), u(\tau_1, \dots, \tau_n) \in \Delta \text{ iff } P^{\mathbb{M}}([\tau(\tau_1, \dots, \tau_n)], [u(\tau_1, \dots, \tau_n)]).$$
$$\text{iff } P^{\mathbb{M}}(\overline{s}(\tau), \overline{s}(u)) \text{ 여기서, } s(x_i) = [\tau_i].$$

다. 식

가정. 식 $\varphi(x_1, \dots, x_n), \psi(x_1, \dots, x_n)$에 대한 수학적 귀납법이 적용된다.

(i) $\neg\varphi(\tau_1, \dots, \tau_n) \in \Delta$이고 여기서 $\tau_i \in T$.

iff $\varphi(\tau_1, \dots, \tau_n) \notin \Delta$. $\quad\cdots\quad$ Δ가 최대 일관적이기 때문에

59) 항의 단계에서 일반적인 항이 함수 $\overline{s}$에 의해 닫힌 항(closed term)이 된다.

iff $\mathbb{M} \not\models \varphi[s]$ for $s(x_i) = [\tau_i]$. $\cdots$ 함수 s에 대한 수학적 귀납법과 정의에 의해
iff $\mathbb{M} \models \neg\varphi[s]$.

(ii) $\varphi \to \psi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \Delta$. $\cdots$ 이는 $(\varphi \to \psi)^{x_1, \ldots, x_n}_{\tau_1, \ldots, \tau_n}$이다.
iff $\neg\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \Delta$ 이거나 $\psi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \Delta$ 이거나 둘 모두일 경우.
iff $\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \not\in \Delta$ 이거나 $\psi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \Delta$ 이거나 둘 모두일 경우.
$\cdots$ Δ가 최대 일관적이기 때문에
iff $s(x_i) = [\tau_i]$에 대해서, $\mathbb{M} \not\models \varphi[s]$ 이거나 $\mathbb{M} \models \psi[s]$ 이거나 둘 모두일 경우.
$\cdots$ 함수 s에 대한 수학적 귀납법과 정의에 의해
iff $\mathbb{M} \models \varphi \to \psi[s]$.

(iii) 마지막으로 $\alpha = \alpha(x, x_1, \ldots, x_n)$에 대한 수학적 귀납법을 가정했을 때, $\mathbb{M} \models \forall x \alpha[s] \Leftrightarrow \forall x \alpha(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \Delta$가 성립되는지만 증명하면 된다. 바로 이 부분에서 헨킨 보조정리에서 도입했던 $\exists x \varphi \to \varphi^x_c$ 문장이 쓰인다.

(iii) **단계 증명.** $\alpha = \alpha(x, x_1, \ldots, x_n)$라고 할 때,

$(\Rightarrow)$ $\exists x \varphi \to \varphi^x_c \in \Delta$이므로,
$\underline{\exists x (\neg\alpha(x, \tau_1, \ldots, \tau_n) \to \neg\alpha(c, \tau_1, \ldots, \tau_n)) \in \Delta}_{(1)}$를 만족하는 $c_{\in \mathcal{L}'}$가 존재한다.
$\cdots$ α뒤의 x와 c는 α내에서 자유변항 x의 변화를 보여준다.
이제 $\mathbb{M} \models \forall x \alpha[s]$를 가정하면,
$\mathbb{M} \models \forall x \alpha[s] \Rightarrow \mathbb{M} \models \alpha[s(x|[c])]$. $\cdots$ $[\tau] = [c]$이므로
$\Rightarrow \underline{\alpha^{x, x_1, \ldots, x_n}_{c, \tau_1, \ldots, \tau_n} \in \Delta}$ * $\cdots$ α에 대한 수학적 귀납법 적용.
$\Rightarrow \neg \exists x \neg\alpha(x, \tau_1, \ldots, \tau_n) \in \Delta$
$\cdots$ (1)에서 $\exists x (\neg\alpha(x, \tau_1, \ldots, \tau_n) \to \neg\alpha(c, \tau_1, \ldots, \tau_n)) \in \Delta$가 있고 이것의 대우형식 적용과 *에서 $\alpha^{x, x_1, \ldots, x_n}_{c, \tau_1, \ldots, \tau_n} \in \Delta$가 있으므로 $\neg \exists x \neg\alpha(x, \tau_1, \ldots, \tau_n) \in \Delta$임을 알 수 있다.
$\Rightarrow \forall x \alpha(x, \tau_1, \ldots, \tau_n) \in \Delta \equiv (\forall x \alpha)^{x_1, \ldots, x_n}_{\tau_1, \ldots, \tau_n}$.

$(\Leftarrow)$ $\forall x \alpha(x, \tau_1, \ldots, \tau_n) \in \Delta$를 가정하면, 임의의 닫힌 항 τ에 대해,
$\forall x \alpha(x, \tau_1, \ldots, \tau_n) \in \Delta \Rightarrow \alpha(\tau, \tau_1, \ldots, \tau_n) \in \Delta$이다.
$\cdots$ 공리 (ㄴ) $\forall x \varphi \to \varphi^x_\tau$에 의해, 변항이 없기 때문에 항 τ가 닫혀 있을 때 항상 가능하다.
$\Rightarrow$ 임의의 닫힌 항 τ와 $s(t_i) = [\tau_i]$에 대해, $\mathbb{M} \models \alpha[s(x|[\tau])]$

$\cdots$ 함수 s에 대한 수학적 귀납법과 정의에 의해
$\Rightarrow \mathbb{M} \vDash \forall x\alpha[s]$. $\cdots$ $\vDash$ 정의에 의해.

$\therefore\ \mathbb{M} \vDash \forall x\alpha[s] \Leftrightarrow \forall x\alpha(\tau_1, \dots, \tau_n) \in \Delta$.

이렇게 $\mathcal{L}'$에 대한 모형 제시가 끝났다. 이쯤에서 지금까지의 증명을 되세겨 보자. 우리는 애초에 $\mathcal{L}$에 대한 모형을 제시하려고 했었다. 자유변항을 가진 식에 대해 참, 거짓 값을 제시할 수 없으므로 임의의 $\Gamma_{\in \mathcal{L}}$에 대해 $v_{i_{\in \Gamma}}$를 d_i로 대체한 것을 Γ'이라 하고 Γ'들의 집합을 $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup \{d_i \mid i < \mathbb{N}\}$으로 상정했다. (즉, $\Gamma' \in \mathcal{L}_1$ 이다.) 그리고 린덴바움 보조정리와 헨킨 보조정리를 만족하는 집합 $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_1 \cup \mathbb{C}$(여기서, $\mathbb{C}$는 $\mathcal{L}_1$에 있지 않은 새로 도입되는 상항들의 집합)를 구성해 $\Delta_{\supseteq \Gamma'}$가 $\mathcal{L}'$에서 최대일관적인 집합이 되고 $\mathbb{M} \vDash \forall x\alpha[s] \Leftrightarrow \forall x\alpha(\tau_1, \dots, \tau_n) \in \Delta$가 성립함을 증명한 것이다. 이제 남은 것은 $\mathcal{L}'$에 대한 모형에서 $\mathcal{L}$에 대한 모형을 제거하더라도 이들이 같음을 증명하는 일만 남았다. Γ의 변항을 d_i로 교체하여 이에 대한 모형을 제시하였으므로 d_i를 가지고 있는 Γ'과 v_i를 가지고 있는 Γ의 중복을 제거하는 의미도 지니겠으나 직관적으로 인식되는 자유변항 v_i를 가진 Γ에 대한 모형이 제시될 수 없음을 확인함으로써 형식체계의 완전성 정리를 완성한다고 할 수 있을 것이다.

$\mathbb{M}_1 = \mathbb{M} \upharpoonright \mathcal{L}$라하고, 함수 $s : \mathbb{V} \to |\mathbb{M}_1| = |\mathbb{M}|$로 정의하자.(여기서 $\mathbb{M} \upharpoonright \mathcal{L}$는 $\mathcal{L}'$의 모형 $\mathbb{M}$에서 $\mathcal{L}$의 모형을 제거한 그러한 모형이라는 의미이다.)

증명. $\varphi(v_0, \dots, v_n) \in \Gamma$, $\varphi(d_0, \dots, d_n) \in \Gamma' \subseteq \Delta$에 대해,

보조정리 5.3.1에 의해, $\mathbb{M} \vDash \varphi(v_0, \dots, v_n)[s]$. 이는 $\mathcal{L}$에서 $\mathbb{M}_1 \vDash \varphi(v_0, \dots, v_n)[s]$를 의미한다. 그러므로 $\mathbb{M} \upharpoonright \mathcal{L}$는 Γ와 $s : \mathbb{V} \to |\mathbb{M}|$(여기서 $s(v_i) = d_i^{\mathbb{M}}$)를 만족한다. $\dashv$

$\therefore\ \Gamma \vDash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$이고 Γ가 일관적이고 오직 그 경우에 Γ가 만족가능하다. $\dashv$

이로써 건전성 정리와 완전성 정리가 제시됨으로써 $\Gamma \vDash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$가 증명되었다. 다음 장에서는 논리학, 힐버트 프로그램 그리고 수학 기초론의 밀접한 관계를 살펴봄과 동시에 완전성 정리가 이들에게 가져다주는 의미 그리고 괴델의 불완전성 정리와 완전성 정리 간의 오해에 대해서 간단하게 살펴보고 이 글을 마치도록 하겠다.

VII. 완전성 정리의 의미

지금까지 현대 논리학이 태동한 시기부터 올바른 수학의 기초를 세우려고 했던 시도들을 살펴보았고 힐버트 프로그램을 중심으로 일차 언어가 어떻게 구성되고 그렇게 구성된 언어에 공리와 추론규칙이 제시되면서 증명이 어떻게 이루어지는지를 바라보았다. 그리고 6장에

서는 이러한 구문론적 형식체계가 참, 거짓을 따지는 의미론적 체계와 동치임을 살펴봄으로써 그러한 체계가 우리의 인식체계와 크게 차이가 나지 않는 체계임을 확인했다. 이 장에서는 마지막으로 몇 가지 오해를 피하기 위해 힐버트 프로그램과 논리학의 관련성을 살펴볼 것이다. 이들의 관계는 수학 기초론과 논리학의 관계라고도 말할 수 있을 것인데 수학 기초론과 논리학의 관련성을 말한다고 한다면 그 밀접함이 너무 당연하여 언급할 필요조차 없어 보인다. 하지만 괴델의 불완전성 정리(Incompleteness Theorem)가 힐버트 프로그램을 무산시킨 정리이기 때문인지 몇 몇 사람들은 힐버트 프로그램과 논리학 그리고 완전성 정리가 아무런 관련성이 없다고 알고 있다. 이런 이유로 첫 번째 단락에서는 논리학과 힐버트 프로그램간의 관계에 대해 살펴볼 것이며 두 번째 단락에서는 괴델의 완전성 정리의 의미를 설명하는 동시에 '완전함(complete)' 개념에 대한 서로 다른 사용에 의해 일어나는 불완전성 정리의 오해를 살펴볼 것이다. 아마도 이러한 차이를 숙지함으로 인해 이 두 이론 모두가 힐버트 프로그램과 밀접한 관련성이 있음을 알 수 있을 것이다.

1. 논리학, 힐버트 프로그램 그리고 수학 기초론

간혹 힐버트 프로그램에서 제시하는 공리 체계에 '0', '+'와 같은 기호들이 사용되고 일차 순수 술어 논리(First-oder pure predicate logic)의 어떠한 공리도 이러한 기호들을 사용하지 않으므로 논리학과 힐버트 프로그램이 전혀 관련이 없다고 말하는 이도 있다. 아마도 이런 주장에서 언급된 것은 페아노 산수(Peano Arithmetic)의 공리일 것인데 이러한 사고는 아마도 페아노 산수가 논리학을 함축하고 있음을 바라보지 못해서 일어나는 문제일 것이다. 페아노 산수의 첫 번째 공리인 '$0 \neq S(0)$' (여기서 함수 $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$는 $S(n) = n+1$)를 보자. 가장 간단한 첫 번째 공리만을 보더라도 부정 기호 '¬'의 사용을 함축하고 있다. 페아노 산수의 구조체(structure)는 $(\mathbb{N}; 0, S, <, +)$와 같이 제시되는데 이 구조체에 논리학에서 사용하는 기호들이 등장하지 않는다고 하여 페아노 산수의 공리가 논리학의 사용을 배제하고 있다는 생각은 잘못된 것이다. 집합론을 통해 논리학과의 연관성을 살펴보자. 집합론을 공부한 사람이라면 페아노 산수의 공리가 집합론을 통해 표현될 수 있음을 알고 있을 것이다. 그리고 수학은 집합론을 통해 해석되어진다. 바로 여기에 논리학과 힐버트 프로그램 그리고 수학 기초론 간의 연관성이 있는 것이다. 다음은 엔더튼(Enderton, H.B.)[2001]의 일차 언어의 사용에 대한 언급이다.

> '...중요한 점은 우리의 언어가 집합론의 언어를 포함하고 있다는 것이다. 수학이 집합론으로 해석(be embedded)되어질 수 있다는 것은 매우 광범위하게 받아들여지는 바다. 이는 다음을 의미한다. ㉠ 수학의 진술(실질적인 정리)은 집합론의 언어로 표현될 수 있다. ㉡ 수학의 정리는 집합론의 공리로부터 논리적으로 이끌어져 나올 수 있다. 우리의 일차 논리 모형(our model of first-order logic)은 매우 적절히 이러한 과정을 반영한다.'[60]

모든 수학의 언어들이 페아노 산수의 공리로부터 출발한다면 이 페아노 산수의 공리는 집합론에 의해 표현되어질 수 있다. 그리고 이 집합론은 "일차논리 모형"에 의해 표현되어질 수 있다. 실제로 집합론과 일차 술어 논리간의 차이가 동일성 기호 '='과 이항 술어 기

60) Enderton, H., *A Mathematical Introduction to Logic*, HARCOURT/ACADEMIC PRESS, 1972(second edition 2001), pp70~71

호 '∈'의 사용일 뿐임을 안다면 이들이 전혀 별계의 형식체계가 아님을 확인할 수 있을 것이다. 페아노 공리 체계이든 집합론이든 그들 체계는 일차논리 언어에 의존해있다는 측면에서형식체계의 근간을 공유하고 있기 때문이다.

2. 완전성 정리의 의미

힐버트 프로그램과 논리학이 전혀 별개라고 말하는 사람은 완전성 정리 역시 힐버트 프로그램의 성취와는 전혀 다른 것이라고 말할 것이다. 아마도 이는 괴델 그 자신의 불완전성 정리(Incompleteness Theorem)가 힐버트 프로그램을 무산시킨 이론이기에 가지는 혼란일 것 같다. 이 글에서 불완전성 정리를 설명하는 것은 무리가 있다. 하지만 적어도 이 글에서 언급할 수 있는 것은 완전성 정리와 불완전성 정리에서 사용되는 '완전함(complete)'의 의미는 서로 차이가 있다는 것이다. 그렇다면 이제 완전성 정리와 불완전성 정리가 가지는 오해를 풀어보도록 하자.

논리학에서 '완전함(complete)'의 개념은 다음의 두 가지 의미로 사용된다.[61)]

의미론적 의미	타당한 모든 문장(식)을 증명할 수 있음
구문론적 의미	이론(theory)의 각 문장을 증명하거나 반증할 수 있음

괴델의 완전성 정리에서 (셀 수 있는) 일차이론(First-order theory)의 비논리공리(nonlogical axioms)가 무엇이든 간에 "모든 일차이론이 완전하다."고 하는 것은 그 이론에서의 "모든 타당한 문장을 증명할 수 있음"을 말하는 것이다. 즉 위 표의 의미론적인 의미를 언급하는 것이며 각 이론의 정리는 그 이론의 공리에 대한 "모든 모형"에서 참인 진술이 된다. 하지만 불완전성 정리는 형식적인 정수론(formal number theory)이 일관적일 경우 이 이론으로부터 증명하거나 반증할 수 없는 "문장이 있음"을 말한다. 말하자면 구문론적인 의미에서의 완전성을 성취하지 못하는 것이다. 각 정리에서 '완전함(complete)'의 의미가 다소 차이가 남은 이 두 이론이 서로 양립할 수 없다는 잘못된 인식을 바로잡아주는데 도움을 줄 수 있을 것이다. 이제 보다 자세히 들어가 보자. 앞서 언급했던 힐버트 프로그램의 ④단계를 다시 한 번 살펴보자.

> ④ 유한한 계산(finitary arithmetical methods)을 통해 확인된 고전수학의 진술과 일치하는 그러한 식이 ③의 방법으로 증명될 수 있음을 (유한하게 결합되었다는 측면에서) 보인다는 것은 오직 그러한 경우에 그 진술이 참임을 보이는 것이다.

이 ④단계에서는 '유한한 계산(finitary arithmetical methods)을 통해 확인된 고전수학의 진술과 일치하는 그러한 식'이라고 공리체계를 설명하는 모습을 볼 수 있다. 이는 (적어도 폰노이만이 요약에 따르면) 힐버트 프로그램이 ①에서 ③의 단계를 통해 구성된 형식체계가 우리가 사용하는 수학 자체와 같다는 가정을 하고 있었음을 알 수 있다. 완전성 정리가 주어진 "일관적인 형식 체계"는 참 혹은 거짓 값을 가질 수 있는 올바른 체계임을 밝혀줬다면 불완전성 정리는 그러한 유한한 공리를 가진 체계를 통해서 모든 "수학"을 표현할 수 없음을 밝힌 것이다. 힐버트 프로그램에 의해 제시된 일차 형식체계(First-order formalizations)가 전체적인 수학을 표현할 수 있다면 완전성 정리와 불완전성 정리는 서로

61) Dawson, J.W., *Logical Dilemmas - The Life and Work of Kurt Gödel*, A K Peters, Wellesley, Massachusetts, 1997, p67

상반된 주장을 하는 것이 될 것이다. 하지만 완전성 정리가 일차 형식체계를 대상으로 하고 있는데 반해 불완전성 정리는 그 이상의 체계인 정수론의 고차 형식체계(Higher-order formalizations of number theory)를 담지하고 있다. 불완전성 정리는 정수론의 기초가 되는 공리인 페아노 공리에 대해, 증명할 수 는 없으나 이를 참이게 하는 어떤 페아노 공리의 모형이 있고 이를 거짓이게 하는 또 다른 페아노 공리의 모형 역시 있음을 시사한다.[62] 즉 완전성 정리는 주어진 일관적인 체계가 참 혹은 거짓 값을 가질 수 있는 올바른 체계임을 알려줬다는 데서 힐버트 프로그램이 성취될 수 있는 가능성을 비춰줬다. 하지만 불완전성 정리는 힐버트 프로그램이 제시한 일차 형식체계만으로는 모든 수학적 체계를 나타낼 수 없음을 보인 것이다.

힐버트 프로그램은 우리가 가장 확실하게 사용할 수 있는 형식체계임은 분명하다. 그리고 괴델의 완전성 정리가 보여줬듯이 이 체계는 참 혹은 거짓을 제시할 수 있는 올바른 체계이며 우리 이성에 잘 부합하는 체계이다. 물론 불완전성 정리에 의해 우리가 사용하는 유한한 공리체계를 가진 일차 형식체계의 한계가 밝혀졌지만 이는 또 다른 의미에서 수학 기초론의 필요성을 시사하기도 한다.

> ‘생각해보라. 모두가 배우고, 가르치고, 그리고 사용하는 수학적 진리와 신빙성이 우리를 오류로 이끈다면 어떻게 할 것인가? 만약 수학적 사고가 실패를 한다면 어디서 그러한 진리와 신빙성을 얻을 수 있을 것인가?’[63]

수학 기초론의 중요성을 호소한 위의 힐버트의 말처럼 수학은 우리의 인류 발전에 가장 큰 공헌을 했다고 해도 과언이 아닐 것이다. 그리고 바로 이러한 올바른 수학을 위해 논리학의 발전이 있어왔다. 단순히 수학 자체만을 따지지 않더라도 프레게의 말처럼 논리학은 생각하는 방법을 체계화한 학문이다. 어떤 사람은 괴델의 불완전성 정리와 하이젠베르크의 양자 역학을 예로 들며 과학적·논리적··수학적 사고의 한계를 주장한다. 관찰을 통해, 수학을 통해, 우리의 사고를 통해 이 세계를 완전히 포착할 수 없을지도 모른다. 하지만 그렇다고 하여 아무 것도 하지 말자는 것은 옳지 않다. 어떠한 현상을 파악하고 알아내려고 하는 것은 이성적 동물인 인간의 본성일 것이다. 어떠한 방식으로 이 세계를 파악하는 것이 불가능하다면 다른 방법을 찾으며 꾸준히 발전하는 것이 지구상의 인류가 걸어온 길이다. 수학이 자연 현상의 파악에 있어 가장 유용한 방법이었다면 논리학은 그러한 방법이 올바른지 혹은 올바르지 않다면 어떠한 방법이 있는지의 길을 제시해 준다. 이러한 선상에서 논리학의 가치가 발견되는 것이다.

참고문헌

하워드 이브스, 『수학의 위대한 순간들』, 경문사, 2003, 허민· 오혜영 옮김.

Beaney, M., *The Frege Reader*, Blackwell Publishers, 1997.

Boolos, G. and Jeffrey, R., *Computability and Logic*, Cambridge University Press,

---

62) ibid., p68

63) Hilbert, D.[1925], "On the infinite", *Form Frege to Gödel - A Source Book in Mathematical Logic, 1879 - 1931*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1967(second edition 1999), ed. by Heijenoort, J. v.

Cambridege, 1974 (fourth edition 2002).

Curry, H. B., "Remarks on The Definition and Nature of Mathemtics", *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, Camvridge, 1964, ed. by Benacerraf, P. and Putnam, H.

Dawson, J.W., *Logical Dilemmas - The Life and Work of Kurt Gödel*, A K Peters, Wellesley, Massachusetts, 1997, p67

Enderton, H., *A Mathematical Introduction to Logic*, HARCOURT/ACADEMIC PRESS, 1972(second edition 2001).

Frankel, A., Bar-Hillel, Y., and Levy, A., *Foundation of Set theory*, 2nd rev. ed., North-Holland Published, Amsterdam, 1973.

Frege, G.[1879], "Begriffsschrift", *Form Frege to Gödel - A Source Book in Mathematical Logic, 1879 - 1931*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1967(second edition 1999), ed. by Heijenoort, J. v.

Gödel, K.[1930], "The completeness of the axioms of the functional calculus of logic", *Form Frege to Gödel - A Source Book in Mathematical Logic, 1879 - 1931*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1967(second edition 1999), ed. by Heijenoort, J. v.

Hilbert, D.[1925], "On the infinite", *Form Frege to Gödel - A Source Book in Mathematical Logic, 1879 - 1931*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1967(second edition 1999), ed. by Heijenoort, J. v.

Hodges, W.[2005], "First-oder Model Theory", *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, http://plato.stanford.edu/.

Jech, T. and Hrbacek, K., *Introduction to Set Theory*, Marcel Dekkerm 1999.

Kennedy, J.[2007], "Kurt Gödel",*Stanford Encyclopedia of Philosophy*, http://plato.stanford.edu/.

Mates. B., *Elementary logic*, Oxford University press, 1972(김영정· 선우환 역, 『기호논리학』, 문화출판사, 1996).

Neumann, J. v.[1931], "The Formalist Foundation of Mathematics", *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1964 (second edition 1983).

Sainsbury, M., *Logical Form - An Introduction to Philosophical Logic*, Blackwell Publishers, 1991(second edition 2001).

Shapiro, S.,[2000] "Classical Logic", *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, http://plato.stanford.edu/.

________, *Thinking about mathematics - The philosophy of mathematics*, Oxford University Press, 2000.

Shoenfield, J. R., *Mathematical Logic*, Association for Symbolic Logic and A K Peters, Natick, Massachusetts, 2000. First published by Addison-Wesley in 1967.

Zach, R.[2003], "Hilbert's Program", *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, http://plato.stanford.edu/.