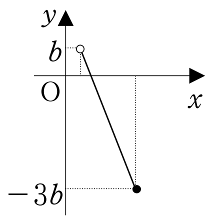
상 급 문 제	작 성 자 : 장 지 경

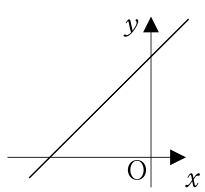
1. 높이가 $50\,\text{cm}$인 물통에 물을 가득 채우는데 물의 높이가 1분에 $0.5\,\text{cm}$씩 높아진다고 한다. x분 후의 물의 높이를 $y\,\text{cm}$라 할 때, 함수의 관계식을 구하고, 이것이 일차함수임을 확인하여라. (단, 현재 물통에 들어 있는 물의 높이는 $20\,\text{cm}$이다.)

2. 일차함수 $y = -\dfrac{2}{3}x + 2$의 그래프와 이것을 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프, x축, y축의 4개의 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

3. 정의역이 $\{x \mid 1 < x \leq 5\}$인 일차함수 $y = ax + 6$의 그래프가 다음과 같을 때, 이 함수의 치역을 구하여라.

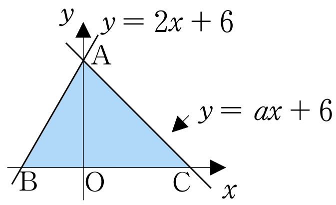


4. 일차함수 $y = \dfrac{b}{a}x - a$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 일차함수 $y = ax + b$의 그래프가 지나지 않는 사분면을 구하여라.



5. 일차함수 $y = -2x + 8$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 일차함수 $y = ax$의 그래프가 이등분할 때, a의 값을 구하여라.

6. 다음 그림과 같이 두 일차함수 $y = 2x + 6$, $y = ax + 6$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 삼각형 ABC의 넓이가 27일 때, $y = ax + 6$은 점 $(m,\ -3)$을 지난다. 이 때, $a + m$의 값을 구하여라.(단, $a < 0$)



7. 정의역이 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$인 일차함수 $y = -3x + 2$의 치역이 $\{y \mid -1 \leq y \leq 4\}$이다. 이 때, $3a + b$의 값은?

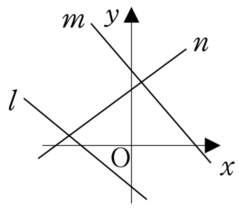
① $\dfrac{7}{3}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $-\dfrac{1}{3}$
④ 1 ⑤ -1

8. 일차함수 $y = ax + b$의 그래프는 x의 값이 -1에서 2까지 변할 때, y의 값이 2에서 -2까지 변한다고 한다. 이 일차함수 $y = ax + b$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

9. 일차함수 $y = 2x$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프는 점 $\text{A}(-1,\ 4)$, $\text{B}(4,\ -1)$로 만들어지는 선분 AB와 만난다. 이 때, b의 값의 범위를 구하여라.

10. 일차함수 $y = ax + b$의 그래프가 점 $(2,\ 1)$을 지나고 기울기 a의 값의 범위는 $-2 \leq a \leq 1$일 때, y절편 b의 값의 범위를 구하여라.

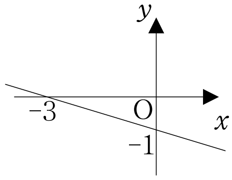
11. 다음 그림은 세 일차함수 ㉠ $y=-ax+b$, ㉡ $y=\dfrac{x}{a}+a-b$, ㉢ $y=3ax+\dfrac{1}{b}$ 의 그래프이다. 직선 l, m, n과 일차함수 ㉠, ㉡, ㉢을 알맞게 짝지어라.



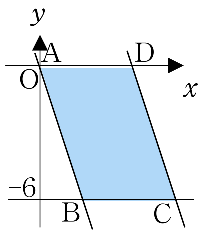
12. 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{2}x+1$의 그래프와 x축 위에서 만나고 $y=-\dfrac{2}{3}x-4$의 그래프와 y축 위에서 만난다. 이 그래프가 $(-3,\ m)$, $(m,\ n)$을 지날 때, n의 값을 구하여라.

13. 나무 A의 높이는 2m, 나무 B의 높이는 8m라 한다. 또, 나무 A와 B 사이의 거리는 5m이고 평평하다. 햇볕이 따스한 어느 날 나무 A의 그림자의 끝과 나무 B의 그림자의 끝이 일치할 때, 나무 A의 그림자의 길이를 구하여라.

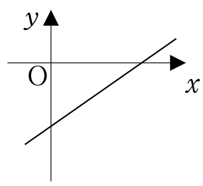
14. 다음 그림은 $y=ax+2$의 그래프를 y축의 방향으로 p만큼 평행이동한 것이다. 이 때, ap의 값을 구하여라.



15. 다음 좌표평면에서 평행사변형 ABCD의 넓이가 18이고 직선 AB의 식이 $y=-4x$일 때, 직선 CD의 식을 구하여라.



16. 일차함수 $y=-\dfrac{b}{a}x+b$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 일차함수 $y=abx+b-a$의 그래프가 지나지 않는 사분면을 구하여라.



(해답)

1. $y = 0.5x + 20 (0 \leqq x \leqq 60)$은 일차함수이다.

[해설] x분 후의 물의 높이는 현재 들어 있는 물의 높이보다 $0.5x$cm가 더 높으므로 $y = 20 + 0.5x$이고, 이 식은 x에 대한 일차식이다. 따라서 $y = 0.5x + 20(0 \leqq x \leqq 60)$은 일차함수이다.

2. 24

[해설] $y = -\frac{2}{3}x + 2$의 그래프는 x절편이 3, y절편이 2이므로 두 점 (3, 0), (0, 2)를 지나는 직선이다. ∴ A(0. 2), B(3, 0)

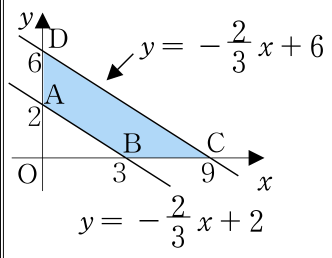
$y = -\frac{2}{3}x + 2 + 4 = -\frac{2}{3}x + 6$의 그래프는 x절편이 9, y절편이 6이므로 두 점 (9, 0), (0, 6)을 지나는 직선이다.

∴ C(9, 0), D(0, 6)

따라서, 색칠한 부분의 넓이는

$\square ABCD = \triangle DOC - \triangle AOB$

$= \frac{1}{2} \times 9 \times 6 - \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 27 - 3 = 24$



3. $\{y \mid -9 \leqq y < 3\}$

[해설] $x = 1$일 때, $y = b$이므로 $b = a + 6$ ……㉠

$x = 5$일 때, $y = -3b$이므로 $-3b = 5a + 6$ ……㉡

㉠×3 + ㉡을 하면 $a = -3$

$a = -3$을 ㉠에 대입하면 $b = -3 + 6 = 3$

∴ 치역은 $\{y \mid -3b \leqq y < b\} = \{y \mid -9 \leqq y < 3\}$이다.

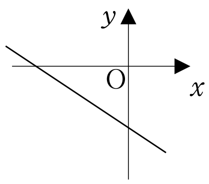
4. 제 1 사분면

[해설] 직선이 오른쪽 위로 향하므로

기울기 $\frac{b}{a} > 0$ ……㉠

y축과 원점의 위에서 만나므로 y절편 $-a > 0$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a < 0$, $b < 0$ $y = ax + b$에서 기울기 $a < 0$, y절편 $b < 0$이므로 그래프는 다음 그림과 같다. 따라서, 제 1 사분면을 지나지 않는다.



5. 2

[해설] $y = -2x + 8$의 그래프는 x절편이 4, y절편이 8이므로 두 점 (4, 0), (0, 8)을 지나는 직선이다. 다음 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

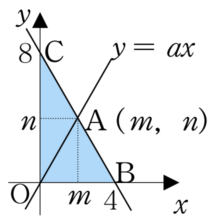
$\frac{1}{2} \times 4 \times 8 = 16$

이 넓이를 일차함수 $y = ax$의 그래프가 이등분하므로

(삼각형 AOB의 넓이) $= 16 \times \frac{1}{2} = 8$, (밑변 OB) $= 4$이므로 높이 $n = 4$

또, (삼각형 AOC의 넓이) $= 8$, (밑변 OC) $= 8$이므로 높이 $m = 2$ ∴ A(2, 4)

점 A(2, 4)는 $y = ax$의 그래프 위의 점이므로 $4 = 2a$ ∴ $a = 2$



6. 8

[해설] $y = 2x + 6$의 그래프는 x절편이 -3, y절편이 6이므로 두 점 $(-3, 0)$, (0, 6)을 지나는 직선이므로 A(0, 6), B$(-3, 0)$

(삼각형 ABC의 넓이) $= \frac{1}{2} \times$ (밑변 BC) $\times 6 = 27$이므로 (밑변 BC) $= 9$ ∴ C(6, 0)

$y = ax + 6$에 (6, 0)을 대입하면 $0 = 6a + 6$

∴ $a = -1$

$y = -x + 6$에 $(m, -3)$을 대입하면

$-3 = -m + 6$ ∴ $m = 9$

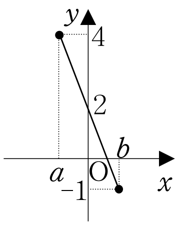
∴ $a + m = -1 + 9 = 8$

7. ⑤

[해설] $y=-3x+2$의 그래프를 그리면 다음과 같다. $x=a$일 때 $y=4$이고, $x=b$일 때 $y=-1$이므로 $4=-3a+2$, $3a=-2$ $\therefore a=-\frac{2}{3}$

$-1=-3b+2$, $3b=3$ $\therefore b=1$

$\therefore 3a+b=3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+1=-1$



8. $\frac{1}{6}$

[해설] $y=ax+b$는 $x=-1$일 때 $y=2$이고, $x=2$일 때 $y=-2$이므로

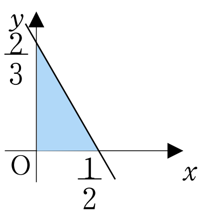
$-a+b=2$ ……㉠ $2a+b=-2$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{4}{3}$, $b=\frac{2}{3}$

즉, 주어진 일차함수는 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$이다.

$y=0$을 대입하면 $x=\frac{1}{2}$이므로, x절편은 $\frac{1}{2}$이고, y절편은 $\frac{2}{3}$이다.

따라서, 주어진 일차함수의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$



9. $-9\leqq b\leqq 6$

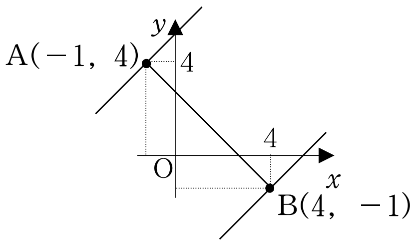
[해설] $y=2x+b$가 점 A를 지날 때, b의 값이 가장 크고 점 B를 지날 때, 가장 작다.

$y=2x+b$에 $(-1,\ 4)$를 대입하면

$4=2\cdot(-1)+b$ $\therefore b=6$

$(4,\ -1)$을 대입하면 $-1=2\cdot 4+b$ $\therefore b=-9$

$\therefore -9\leqq b\leqq 6$



10. $-1\leqq b\leqq 5$

[해설] $y=ax+b$의 그래프가 점 $(2,\ 1)$을 지날 때

(ⅰ) $a=-2$인 직선 l의 그래프의 식

$y=-2x+b$에 $(2,\ 1)$을 대입하면

$1=-2\times 2+b$ $\therefore b=5$

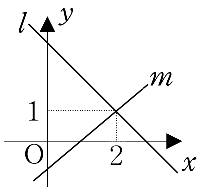
$\therefore y=-2x+5$

(ⅱ) $a=1$인 직선 m의 그래프의 식

$y=x+b$에 $(2,\ 1)$을 대입하면 $1=2+b$

$\therefore b=-1$ $\therefore y=x-1$

따라서, 기울기 a의 값의 범위가 $-2\leqq a\leqq 1$이면 y절편 b의 값의 범위는 $-1\leqq b\leqq 5$



11. ㉠- n, ㉡- l, ㉢- m

[해설] 세 직선 중 ㉠만 기울기의 부호가 다르고 직선 n만 오른쪽 위로 향하므로

㉠ $y=-ax+b$는 직선 n의 식이다.

$-a>0$, $b>0$ $\therefore a<0$, $b>0$

㉡ $y=\frac{x}{a}+a-b$에서 기울기 $\frac{1}{a}<0$

y절편 $a-b$는 (음수) − (양수) = (음수) + (음수) <0이므로 직선 l의 식이다.

㉢ $y=3ax+\frac{1}{b}$에서 기울기가 $3a<0$, y절편 $\frac{1}{b}>0$이므로 직선 m의 식이다.

한 성 중 학 교

12. -8

[해설] $y=\frac{1}{2}x+1$의 x절편: $0=\frac{1}{2}x+1$

$\therefore x=-2$

$y=-\frac{2}{3}x-4$의 y절편 : -4

$y=ax+b$에 $(-2,\ 0),(0,\ -4)$를 대입하면

$a=-2,\ b=-4$이므로 $y=-2x-4$

이것이 $(-3,\ m)$, $(m,\ n)$를 지나므로

$m=-2\cdot(-3)-4=2$

$n=-2\cdot2-4=-8$

13. $\frac{5}{3}$ m

[해설] 그림에서 나무 A의 꼭대기에서 나무 B에 내린 수선의 발을 H라 하면

(직선 OB의 기울기) $=\frac{\overline{BH}}{\overline{AH}}=\frac{6}{5}$

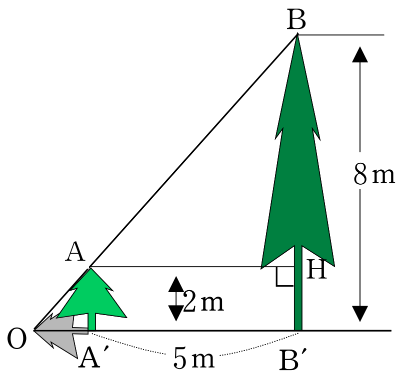
나무 A의 그림자의 길이를 xm라 하면

(직선 OA의 기울기) $=\frac{2}{x}$

그런데 두 그림자의 끝이 일치하므로 직선 OB의 기울기와 직선 OA의 기울기는 같다.

즉, $\frac{2}{x}=\frac{6}{5}$, $\frac{x}{2}=\frac{5}{6}$ $\therefore x=\frac{5}{3}$

따라서, 나무 A의 그림자의 길이는 $\frac{5}{3}$m이다.



14. 1

[해설] 두 점 $(-3,\ 0)$, $(0,\ -1)$을 지나므로

(기울기)$=\frac{-1-0}{0-(-3)}=-\frac{1}{3}$ $\therefore a=-\frac{1}{3}$

y절편이 2에서 -1이 되었으므로 -3만큼 평행이동한 것이다. $\therefore p=-3$

$\therefore ap=\left(-\frac{1}{3}\right)\times(-3)=1$

15. $y=-4x+12$

[해설] $\square ABCD=\overline{AD}\times6=18$ $\overline{AD}=3$이므로 점 D의 좌표는 $(3,\ 0)$이다.

직선 AB와 직선 CD가 평행하므로 직선 CD의 식의 기울기는 -4이고 직선 CD의 식은 $y=-4x+b$이다.

$y=-4x+b$의 그래프가 $(3,\ 0)$을 지나므로

$0=-4\times3+b$ $\therefore b=12$

$\therefore$ 직선 CD의 식은 $y=-4x+12$

16. 제 1 사분면

[해설] 오른쪽 위로 향하는 직선의 기울기 $-\frac{b}{a}>0$ …… ㉠

y축과 원점의 아래에서 만나므로 y절편 $b<0$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a>0,\ b<0$

일차함수 $y=abx+b-a$에서 기울기 $ab<0$, y절편 $b-a$는 (음수) $-$ (양수) $=$ (음수) $+$ (음수) <0이므로 제 1 사분면을 지나지 않는다.