Angular Velocity

KITECH 양광웅 작성

물체의 각속도(Angular Velocity)와 오일러 각(Euler Angles), 회전행렬(Rotation Matrix)간의 관계를 알아보자

Angular Velocity

물체의 각속도는 물체가 단위시간당 회전한 양을 말한다. 물체의 각속도는 다음과 같이 표시되며,

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$$

각속도 벡터 $\boldsymbol{\omega}$의 물리적 성질 보자면, 벡터의 방향은 물체의 회전축을 나타내고 벡터의 크기는 회전 속도를 나타낸다고 이해할 수 있다.

Derivative of a Rotation Matrix

회전행렬을 시간에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ ←직교행렬(Orthogonal matrix)의 성질

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T = \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{O}$$

$\mathbf{S} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$ 로 두면, 3 x 3크기의 행렬 $\mathbf{S}$는 다음을 만족하기 때문에 반대칭행렬(skew-symmetric matrix)이 된다.

$$\mathbf{S} + \mathbf{S}^T = \mathbf{O}$$

결국 다음과 같이 회전행렬을 시간에 대하여 미분한 행렬을 구할 수 있다.

$$\underline{\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{S}\mathbf{R}}$$

상기 식을 물리적 의미로 해석해 보자면, 어떠한 고정된 벡터 $\mathbf{p}'$가 회전행렬에 의해 회전된 벡터는 $\mathbf{p} = \mathbf{R}\mathbf{p}'$이고, 이를 시간에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{p}' = \mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{p}'$$

물체좌표계에 고정된 벡터 $\mathbf{p}'$가 있고 기준좌표계에 대한 물체좌표계가 $\boldsymbol{\omega}$로 회전하고 있을 때, $\mathbf{p}$의 속도는 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{p}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}\mathbf{p}'$$

그러므로, 행렬 $\mathbf{S}$는 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$와 다음의 관계를 가진다.

$$\mathbf{S} = (\boldsymbol{\omega}\times) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

Integration of Rotation Matrix

회전행렬 $\mathbf{R}$은 다음과 같이 적분으로부터 계산할 수 있다.

$$\mathbf{R} = \int \dot{\mathbf{R}} dt = \int \mathbf{S}\mathbf{R} dt$$

이산시간(discrete time)에 대하여 적분하면 다음과 같다.

$$\mathbf{R}(k+1) = \mathbf{R}(k) + \dot{\mathbf{R}}(k)\Delta t = \mathbf{R}(k) + \mathbf{S}(k)\dot{\mathbf{R}}(k)\Delta t$$

Very accurate Rotation Matrix integration:

회전행렬을 보다 정밀하게 적분하기 위해서는 테일러 확장(Taylor expansion)을 이용할 수 있다.

$$e^{\mathbf{A}} \approx \mathbf{I} + \frac{\sin\sigma}{\sigma}\mathbf{A} + \frac{1-\cos\sigma}{\sigma^2}\mathbf{A}^2$$

$$\sigma = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\Delta t = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \Delta t$$

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A}$$

결국 다음과 같은 형태가 된다.

$$\mathbf{R}(k+1) = \mathbf{R}(k)\left(\mathbf{I} + \frac{\sin\sigma}{\sigma}\mathbf{A} + \frac{1-\cos\sigma}{\sigma^2}\mathbf{A}^2\right)$$

Normalization of Rotation Matrix

만일 회전행렬이 계속해서 업데이트된다면 수치 계산의 미소한 오류가 누적되어 행렬의 직교성이 만족되지 않는다. 만일 이러한 회전행렬 $\tilde{\mathbf{R}}$ 이 있을 때 ($\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{R}}^T \neq \mathbf{I}$), 다음과 같이 정규화 될 수 있다.

$$\mathbf{R} = \tilde{\mathbf{R}} - 0.5(\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{R}}^T)\tilde{\mathbf{R}}$$

Calculation of Euler Angle Velocity using Angular Velocity

오일러각의 회전속도(Euler Angle Velocity)는 각속도(Angular Velocity)로부터 계산 가능하다.

ZYX(Roll-Pitch-Yaw) Angles:

오일러각이 Z축→Y축→X축 변환 순서를 따르는 경우, 기준좌표계에 대한 각속도 ($\omega_x, \omega_y, \omega_z$)와 오일러각(ϕ, θ, ψ)의 회전속도 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \mathbf{R}_z(\psi)\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_z(\psi)\cdot\mathbf{R}_y(\theta)\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

상기 식을 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \mathbf{C}\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi\cos\theta & \cos\psi & 0 \\ -\sin\theta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{C}^{-1}\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\psi/\cos\theta & \sin\psi/\cos\theta & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \cos\psi\tan\theta & \sin\psi\tan\theta & 1 \end{bmatrix}$$

물체좌표계에 대한 각속도와 오일러각의 회전속도 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.
(주의: 기준좌표계에 대한 물체좌표계가 $\boldsymbol{\omega}$ 로 회전하고 있기 때문에 좌표계를 동일하게 만들기 위해서 $\boldsymbol{\omega}$ 를 기준좌표계로 변환하여야 한다: $\mathbf{R}_z(\psi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_x(\phi)\boldsymbol{\omega}$)

$$\mathbf{R}_z(\psi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_x(\phi)\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}+\mathbf{R}_z(\psi)\begin{bmatrix}0\\ \dot{\theta}\\0\end{bmatrix}+\mathbf{R}_z(\psi)\mathbf{R}_y(\theta)\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\0\\0\end{bmatrix}+\mathbf{R}_x^T(\phi)\begin{bmatrix}0\\ \dot{\theta}\\0\end{bmatrix}+\mathbf{R}_x^T(\phi)\mathbf{R}_y^T(\theta)\begin{bmatrix}0\\0\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}$$

상기 식을 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\mathbf{C}\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -\sin\theta\\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta\\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}=\mathbf{C}^{-1}\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \sin\phi\tan\theta & \cos\phi\tan\theta\\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi\\ 0 & \sin\phi/\cos\theta & \cos\phi/\cos\theta\end{bmatrix}$$

XYZ Angles:

오일러각이 X축→Y축→Z축 변환 순서를 따르는 경우, 기준좌표계에 대한 각속도 ($\omega_x,\omega_y,\omega_z$)와 오일러각(ϕ,θ,ψ)의 회전속도 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\0\\0\end{bmatrix}+\mathbf{R}_x(\phi)\begin{bmatrix}0\\ \dot{\theta}\\0\end{bmatrix}+\mathbf{R}_x(\phi)\cdot\mathbf{R}_y(\theta)\begin{bmatrix}0\\0\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}$$

이것을 행렬로 표현하면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\mathbf{C}\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -\sin\theta\\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta\\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi\tan\theta & \cos\phi\tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi/\cos\theta & \cos\phi/\cos\theta \end{bmatrix}$$

Integration of Euler Angles

이산시간에 대하여 오일러각은 다음과 같이 적분으로 계산할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}_{k+1} \approx \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}_{k} + \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \Delta t$$