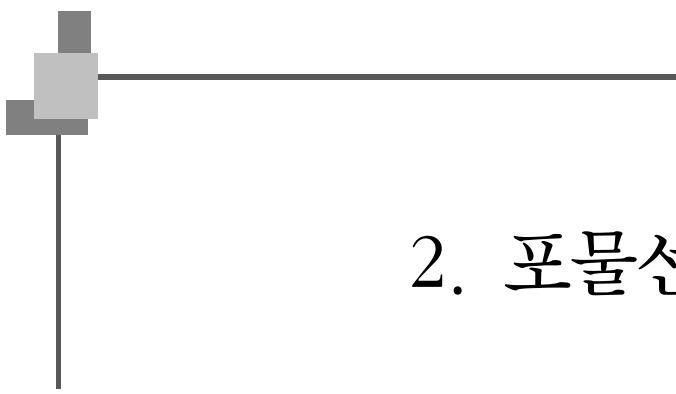
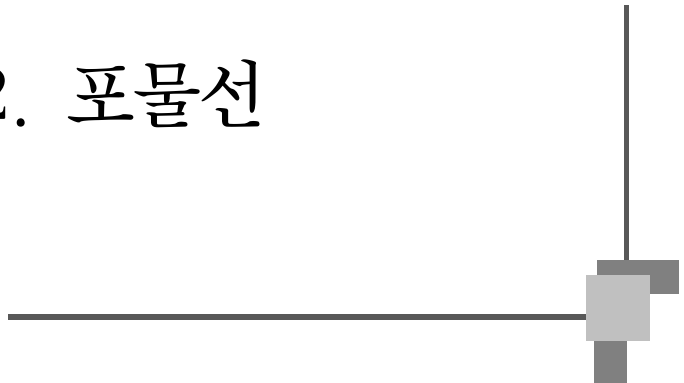




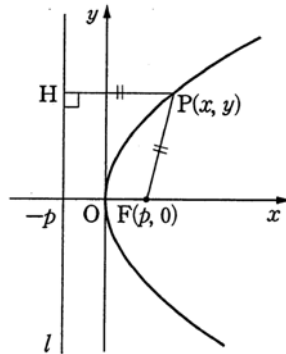
## 2. 포물선



# 1. 포물선의 정의 및 기본 성질

## (1) 포물선의 정의

한 정점과 한 정직선으로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취

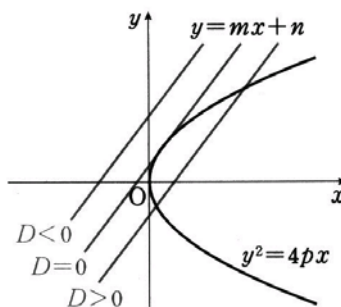


한 정점  $F$ 를 포물선의 초점, 정직선  $l$ 을 포물선의 준선, 점  $F$ 를 지나고 준선에 수직인 직선을 포물선의 축, 포물선이 축과 만나는 점  $O$ 를 포물선의 꼭지점이라 한다.

## (2) 포물선의 방정식

초점  $F(p, 0)$ , 준선  $x = -p$ 인 포물선의 방정식  $y^2 = 4px$

## (3) 포물선에 접하는 접선의 방정식



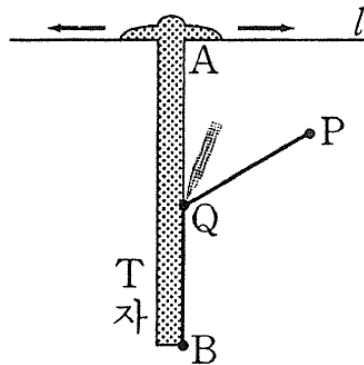
① 기울기가  $m$  이고  $y^2 = 4px$  에 접하는 접선의 방정식  $y = mx + \frac{p}{m}$  (단,  $m \neq 0$ )

② 포물선  $y^2 = 4px$  위의 점  $(x_1, y_1)$  에서의 접선의 방정식  $y_1 y = 2p(x + x_1)$

## 2. 자취를 통해 본 포물선

### (1) 포물선의 자취 1

그림과 같이 선분  $AB$ 의 길이와 같은 길이의 실을 점  $P$ 와  $T$ 자의 한 끝  $B$ 에 고정시킨 후, 실을 팽팽하게 유지하면서 직선  $l$ 을 따라  $T$ 자를 수평으로 이동시킬 때, 점  $Q$ 가 그리는 자취는 포물선(의 일부)이다.



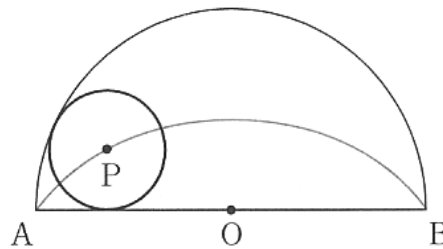
(증명)

실의 길이는 일정하므로  $AB = AQ + QB = PQ + QB$  이고  $AQ = PQ$  이므로 점  $Q$ 는 한 정점  $P$ 와 동점  $A$ 로부터 같은 거리에 있다. 그런데 점  $A$ 는 직선  $l$  위의 움직이는 점이므로 점  $Q$ 는 한  $P$ 와 직선  $l$ 로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취이다.

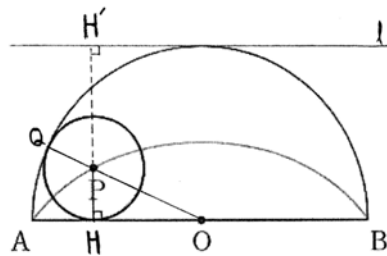
따라서 점  $Q$ 는  $P$ 를 초점으로 하고  $l$ 을 준선으로 하는 포물선(의 일부)을 그린다. <증명 끝>

## (2) 포물선의 자취 2

그림과 같이 선분  $AB$  를 지름으로 하는 반원에 내접하는 원의 중심  $P$ 의 자취는 포물선(의 일부)이다.



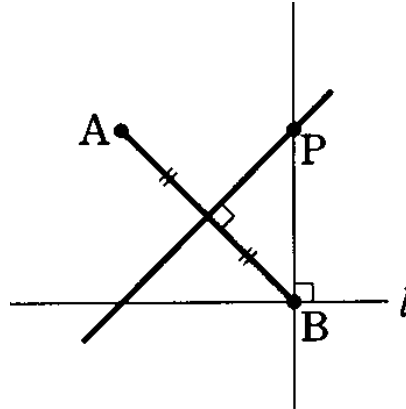
(증명)



점  $P$ 는 반원에 접하는 원의 중심이므로  $PH = PQ$ 이다.  $OQ$ 는  $AB$ 를 지름으로 하는 반원의 반지름으로 일정하고 이를  $R$ 이라 하면  $OQ = OP + PQ = OP + PH = R$ 로 일정하다. 한편, 점  $H$ 에서  $AB$ 에 평행하면서 반원에 접하는 직선  $l$ 에 수선을 그어 그 교점을  $H'$ 라 하면  $HH' = HP + PH' = R$ 이다. 따라서  $OP + PH = H'P + PH$  즉,  $OP = H'P$ 이 성립하여 점  $P$ 는 점  $O$ 와 직선  $l$ 로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취, 즉 포물선(의 일부)이다. <증명 끝>

## (3) 포물선의 자취 3

정점  $A$ 와 이 점을 지나지 않는 한 정직선  $l$ 이 있을 때, 직선  $l$  위를 움직이는 점  $B$ 를 지나고  $l$ 에 수직인 직선과 선분  $AB$ 의 수직이등분선이 만나는 교점  $P$ 의 자취는 포물선이다.



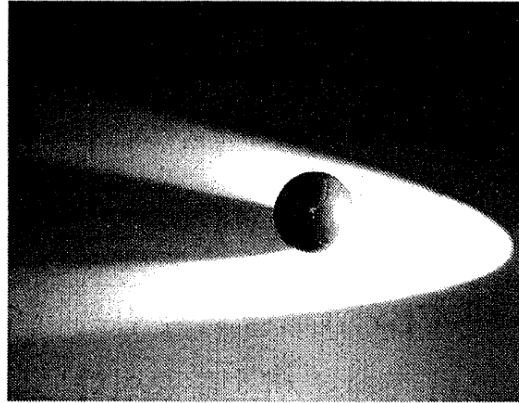
(증명)

선분  $AB$ 와  $AB$ 의 수직이등분선의 교점을  $H$ 라 하면  $PAH \equiv BPH$  ( $SAS$  합동) 이므로  $AP = BP$  이다.

따라서 점  $P$ 의 자취는 정점  $A$ 와 직선  $l$ 로부터 같은 거리에 있는 점들, 즉 포물선이다. 초점이  $A$ , 준선이  $l$ 이다. <증명 끝>

## (4) 포물선의 자취 4

그림과 같이 구의 높이에서 불을 비추면 구의 그림자 모양은 포물선(의 일부)이다.



(증명)

반지름은  $r$  인 구를 좌표공간에 적절히 놓아두자. 중심을  $O(0, 0, r)$ , 빛의 위치(구 밖의 한 점)를  $A(a, 0, 2r)$  라 하자. 빛의 위치의  $y$  좌표를 0 으로 놓는 것은  $x$  축과 평행한 방향으로 빛을 비춘다는 의미이다.

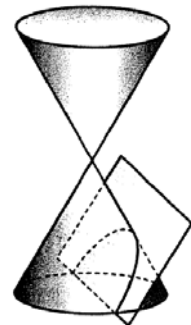
그림자 끝의 임의의 한 점을  $P(x, y, 0)$ ,  $\overrightarrow{AP}$ 가 구와 접하는 점을  $B$ ,  $\angle PAO = \theta$  라고 하고,  $xy$  평면에 비추는 구의 그림자를 생각해보자.

일반적으로  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AO} = |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AO}| \cos \theta = |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AB}|$  이 성립하므로

$(x-a, y, -2r) \cdot (-a, 0, -r) = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + (-2r)^2} \times \sqrt{(-a)^2 + (-r)^2 - r^2}$  가 된다.

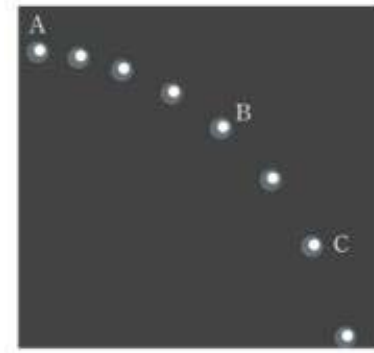
이를 정리하면  $a^2 y^2 = -4ar^2 x + 4r^2$  이 되어  $y^2 = mx + n$  ( $m, n$ 은 상수) 꼴의 포물선의 방정식이 된다.

구의 높이에서 비추는 구의 그림자의 모양이 포물선이 되는 것은 원뿔을 모선에 평행하게 잘랐을 때 포물선이 되는 것과 같은 이치이다. 빛의 위치는 원뿔의 꼭지점, 그림자가 생기는 면은 모선과 평행으로 자른 면에 대응하게 되는 것이다. 원뿔곡선이 원뿔을 자르는 방향을 변화시켰다면 구의 그림자는 빛의 위치를 변화시킴으로써(원뿔이 있을 때 원뿔의 꼭지점의 위치를 변화시킴으로써) 원뿔을 자르는 방향을 변화시키는 것과 같은 현상을 일으키는 것이다. <증명 끝>



## (5) 포물선의 자취 5

일정한 속력으로 하늘로 쏘아진 물체는 포물선 운동을 한다.



(증명)

하늘로 쏘아진 물체의 수평 방향의 속력을  $v_x$ , 수직 방향으로 속력을  $v_y$  라 하면,  $t$  시간 동안

움직이는 수평거리  $x$  는  $x = v_x t$ , 수직거리  $y$  는  $y = v_y t - \frac{1}{2} g t^2$  ( $g$ 는 중력가속도) 이다.

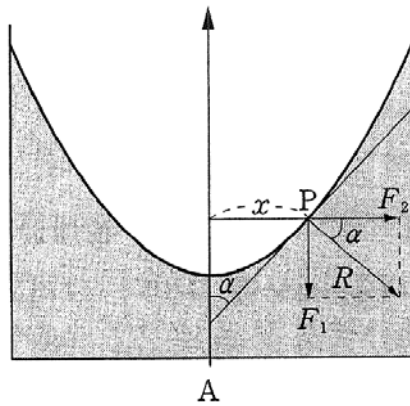
$t$  를 소거하여  $x, y$  의 관계식을 구하면

$$y = v_y \left( \frac{x}{v_x} \right) - \frac{1}{2} g \left( \frac{x}{v_x} \right)^2 = ax^2 + bx \quad \left( a = -\frac{g}{2v_x^2}, b = \frac{v_y}{v_x} \right) \text{이 된다.}$$

따라서  $(x, y)$  의 자취는 포물선이 된다. <증명 끝>

## (6) 포물선의 자취 6

회전하는 유체의 표면은 포물면을 이룬다.



(증명)

유체 표면 위의 점  $P$  에서의 중력은  $F_1 = mg$ , 원심력은  $F_2 = mxw^2$  이다. ( $w$  는 각속도,  $x$  는 점  $P$  의 회전 반지름)

축과 포물면의 접선이 이루는 각을  $\alpha$  라고 하면

$$\tan \alpha = \frac{F_1}{F_2} = \frac{mg}{mxw^2} = \frac{g}{xw^2}, \quad \frac{dx}{dy} = \tan \alpha \text{ 이므로}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{g}{xw^2}, \quad dy = \frac{w^2}{g} x dx$$

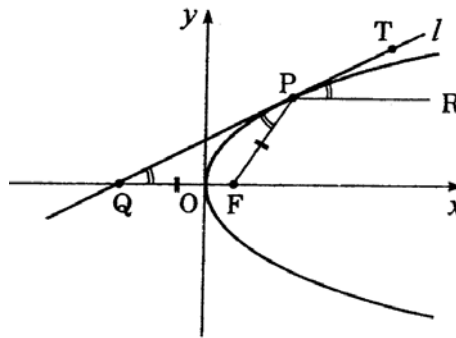
$$\therefore y = \frac{w^2}{2g} x^2$$

따라서 점  $P$  는 포물선 위의 점이다. <증명 끝>

### 3. 포물선의 기하학적 특성

#### (1) 포물선의 기하학적 특성 1

축에 평행하게 입사한 빛은 포물선 위의 한 점에서 반사하여 초점을 향해 진행한다. 역으로, 포물선의 초점에서 나온 빛은 포물선 위의 한 점에서 반사하여 축에 평행하게 진행한다.



(증명1) 빛의 입사각과 반사각이 같다는 성질을 이용한 증명

위의 그림에서 포물선의 방정식을  $y^2 = 4px$ , 점  $F$ 의 좌표를  $F(k, 0)$ 이라 하면,  $k = p$ 임을 보이면 된다.

점  $P$ 를  $P(x_1, y_1)$ 이라 하면 그 점에서의 접선의 기울기는  $\frac{2p}{y_1}$ 이므로 접선의 방정식은

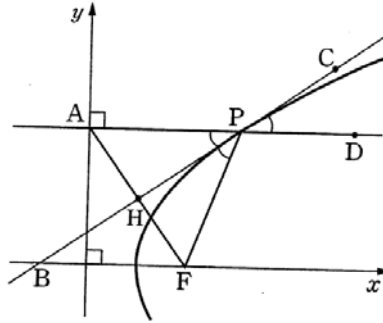
$y - y_1 = \frac{2p}{y_1}(x - x_1)$ 이 된다. 접선의 방정식이  $x$ 축과 만나는 점  $Q$ 는  $(-x_1, 0)$ 이다.

빛의 입사각과 반사각이 같으므로  $\angle FPQ = \angle TPR$ 이고  $\angle PQF$ ,  $\angle TPR$ 는 동위각이므로  $\angle PQF = \angle FPQ = \angle TPR$ 이  $\triangle FPQ$ 는  $FP = FQ$ 인 이등변삼각형이다. 따라서  $PQ$ 의 중점  $(0, \frac{y_1}{2})$ 에서의 수선은 점  $F$ 를 지난다. 수선의 방정식을 구하면  $y = -\frac{y_1}{2p}x + \frac{y_1}{2}$ 이고,  $x$ 절편을 구하면  $x = p$ 가 된다. 즉  $k = p$ 이다. 따라서 축에 평행하게 입사한 빛은 포물선 위의 한 점에서 반사하여 초점을 지나게 된다.

역으로 초점을 지나는 빛은 포물선 위의 한 점에서 반사하여 축에 평행하게 진행한다.

위의 그림에서 초점  $F(p, 0)$ 를 지나는 빛이 점  $P$ 를 지나면  $FQ = FP = p + x_1$ 이 성립하여  $\triangle FPQ$ 는 이등변삼각형이 된다. 입사각과 반사각이 같으므로  $PR$ 은 축에 평행하게 된다. <증명 끝>

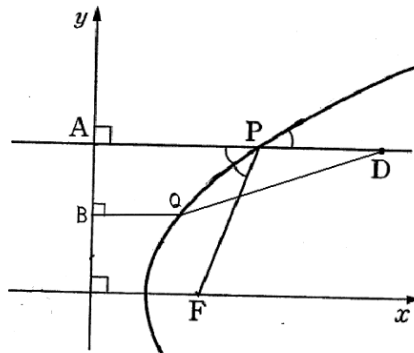
(증명2) 포물선의 자취를 이용한 증명



그림과 같이  $x$ ,  $y$  축 위에 초점  $F$ 와 점  $A$ 를 잡는다. 선분  $AF$ 의 수직이등분선과 점  $A$ 를 지나고  $y$  축에 수직인 직선의 교점을  $P$ 라고 하자. 그러면  $PA = PF$  ( $\because \triangle PAH \equiv \triangle PHF$ )이므로 점  $P$ 의 자취는 포물선이고  $y$  축은 준선, 점  $F$ 는 초점이다.

또한 그림에서  $\angle FPH = \angle CPD$ 가 성립함을 확인할 수 있다. 따라서 점  $D$ 를 지나 축에 평행하게 들어온 빛은 점  $P$ 에서 반사되어 초점  $F$ 를 지나게 되고, 거꾸로 초점을 지난 빛은 축에 평행하게 반사된다. <증명 끝>

(증명3) 빛이 균일한 매질을 통과할 때에는 최단거리 경로를 따라 진행된다는 성질을 이용한 증명

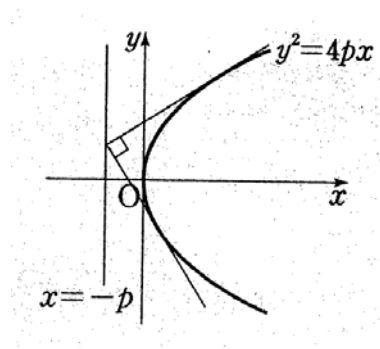


그림에서 포물선 위의 임의의 점  $Q$ 에 대하여  $DQ + QF$ 의 최솟값이  $DP + PF$ 임을 보이면 된다.

포물선 위에 임의의 점  $Q$ 를 잡으면  $DQ + QF = DQ + QB$ ,  $DP + PF = DP + PA = DA$ ,  $DA \leq DQ + QB$ 이므로  $DP + PF \leq DQ + QF$ 이 항상 성립한다. 따라서  $D$ 를 출발한 빛은 축에 평행하게 진행하다 초점을 향해 반사하며, 역으로 초점을 향한 빛은 포물선 위의 점에서 반사한 후 축에 평행하게 진행하게 된다. <증명 끝>

## (2) 포물선의 기하학적 특성 2

포물선 밖에서 그은 두 접선이 수직인 점들의 자취는 준선이다. 역으로, 준선에서 그은 두 접선은 수직이다.



(증명1)

포물선 밖의 임의의 점을  $P(x_1, y_1)$  이라 하면 그 점을 지나는 직선은  $y - y_1 = m(x - x_1)$  이다.

이 직선이 포물선에 접하므로  $y^2 = 4px$  에 대입 하면 다음과 같다.

$$y^2 = 4p\left(x_1 + \frac{y - y_1}{m}\right)$$

$$my^2 - 4py + 4p(y_1 - mx_1) = 0$$

$$D/4 = 0 \text{ 이므로 } 4p^2 - 4pm(y_1 - mx_1) = 0$$

$p \neq 0$  이므로 양변을  $4p$  로 나눈 후  $m$  에 관하여 정리하면  $x_1 m^2 - y_1 m + p = 0$  이 되는데,

두 접선이 수직이 되려면 두 접선의 기울기의 곱이  $-1$  이므로 근과 계수의 관계에 의하여  $m_1 \times m_2 = \frac{p}{x} = -1$  이 성립한다. 따라서 두 접선이 수직이 되는 점들의 자취는  $x = -p$  즉, 준선이 된다.

역으로 준선 위의 점  $(-p, y_1)$  에서 접선의 방정식을 구하면  $x_1 m^2 - y_1 m + p = 0$  이  $-p m^2 - y_1 m + p = 0$  이고 근과 계수의 관계에 의하여  $m_1 \times m_2 = -1$  이므로 두 접선은 항상 수직이 된다. <증명 끝>

(증명2)

두 접선의 기울기를  $m_1, m_2$  라고 하면 접선의 방정식은  $y = m_1 x + \frac{p}{m_1}$ ,  $y = m_2 x + \frac{p}{m_2}$  이고,

두 접선의 기울기가 수직이므로  $m_1 \cdot m_2 = -1$  이다.

두 접선의 방정식의 교점을 구하면

$$m_1 x + \frac{p}{m_1} = m_2 x + \frac{p}{m_2}$$

$$(m_1 - m_2)x = p \frac{m_1 - m_2}{m_1 m_2}$$

$$x = -p \quad (\because m_1 m_2 = -1)$$

따라서 두 접선이 만나는 점의  $x$  좌표는 준선 위에 있다.

이번에는 준선에서 그은 두 접선이 수직임을 증명하자.

두 접선의 기울기를  $m_1, m_2$  라고 하면 두 접선의 방정식은  $y = m_1 x + \frac{p}{m_1}, y = m_2 x + \frac{p}{m_2}$  이

다.

두 접선이 만나는 점이 준선 위에 있으므로 두 접선은  $x = -p$  에서 만나므로

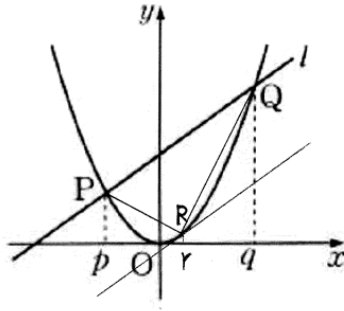
$-m_1 p + \frac{p}{m_1} = -m_2 p + \frac{p}{m_2}$  이고 이를 정리하면  $(m_1 - m_2) \left( 1 + \frac{1}{m_1 m_2} \right) = 0$  이다. 그런데

$m_1 \neq m_2$  이므로  $m_1 \cdot m_2 = -1$  이다.

따라서 준선에서 그은 두 접선은 수직이다. <증명 끝>

## (3) 포물선의 기하학적 특성 3

포물선  $y = ax^2$  과 직선이 만나는 두 점  $P, Q$  와 두 점 사이의 점  $R$  에 대하여  $\triangle PQR$  의 넓이가 최대일 때 세 점  $P, Q, R$  의  $x$  좌표  $p, q, r$  은 등차수열을 이룬다.



(증명)

포물선의 방정식을  $y = ax^2$  이라 하고 두 점  $P, Q$  를 지나는 직선의 방정식을  $y = mx + n$  이라 하자.

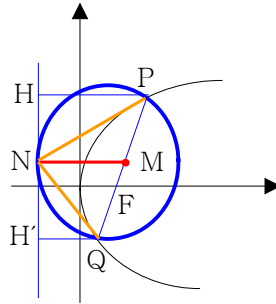
$\triangle PQR$  의 넓이가 최대가 될 때는 점  $R$  이 기울기가  $m$  인 직선과 포물선  $y = ax^2$  의 접점에 위치할 때이다. 기울기가  $m$  인 직선과  $y = ax^2$  의 접점의  $x$  좌표가  $r$  이므로  $2ar = m$ , 즉  $r = \frac{m}{2a}$  이 성립한다.

한편, 두 점  $P, Q$  의  $x$  좌표  $p, q$  는  $y = ax^2$  와  $y = mx + n$  의 교점이므로 대입하여 정리하면  $ax^2 - mx - n = 0$  이고, 근과 계수의 관계에 의해  $p + q = \frac{m}{a}$  이다.

따라서  $p, q, r$  사이에는  $2r = p + q$  인 관계가 성립하고, 차례대로 등차수열을 이룸을 알 수 있다. <증명 끝>

## (4) 포물선의 기하학적 특성 4

포물선의 초점을 지나는 직선이 포물선과 만나는  $P, Q$ , 선분  $PQ$ 의 중점을  $M$ 이라 하고,  $M$ 을 지나고 축에 평행한 직선이 준선과 만나는 점을  $N$ 이라 하면  $PM = QM = MN$ 이고  $\triangle PNQ$ 는 직각삼각형이 된다.



(증명)

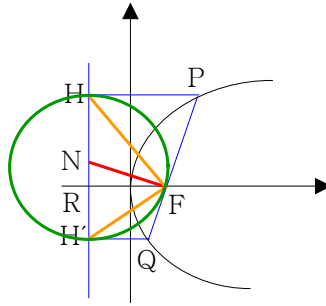
 $PH \parallel MN \parallel QH'$  이고  $PM = QM$  이므로

$$MN = \frac{PH + QH'}{2} = \frac{PF + QF}{2} = \frac{PM + QM}{2} = PM = QM \text{ 이 성립한다.}$$

또한  $PM = QM = MN$  이므로  $M$ 은  $\triangle PNQ$ 의 외심이 되고  $\triangle PNQ$ 는 직각삼각형이다. (직각삼각형의 외심은 빗변의 중점에 있다.) <증명 끝>

## (5) 포물선의 기하학적 특성 5

포물선의 초점  $F$ 를 지나는 직선이 포물선과 만나는  $P, Q$ 라 하고,  $P$ 를 지나 축에 평행한 직선이 준선과 만나는 점을  $H$ ,  $Q$ 를 지나 축에 평행한 직선이 준선과 만나는 점을  $H'$  이라 하면  $\triangle FHH'$ 는 직각삼각형이 된다.



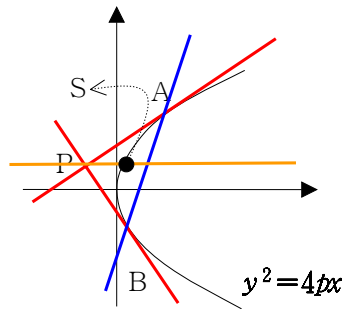
(증명)

$PH = PF$ ,  $QF = QH'$  이므로  $\angle PHF = \angle PFH$ ,  $\angle QFH' = \angle QH'F$ 이고,  
 $PH \parallel MN \parallel QH'$  이므로  $\angle PHF = \angle PFH = \angle HFR$ ,  $\angle QFH' = \angle QH'F = \angle H'FR$ 이  
 성립한다.

따라서  $\angle HFF' = \angle R$  이고  $\triangle FHH'$ 는 직각삼각형이 된다. <증명 끝>

## (6) 포물선의 기하학적 특성 6

포물선  $y^2 = 4px$  밖의 한 점  $P(x_1, y_1)$  에서 두 접선을 그을 때, 두 접점  $A, B$  를 지나는 직선의 방정식(극선의 방정식)은  $y_1y = 2p(x + x_1)$  이다



(증명)

$A, B$  의 좌표를 각각  $(x_2, y_2), (x_3, y_3)$  라 하면 두 점을 지나는 접선의 방정식은 각각  $y_2y = 2p(x + x_2), y_3y = 2p(x + x_3)$  이다.

그런데 점  $P$  는 두 접선의 교점이므로  $y_2y_1 = 2p(x_1 + x_2), y_3y_1 = 2p(x_1 + x_3)$  이 항상 성립한다.

이는  $y_1y = 2p(x + x_1)$  이 항상  $(x_2, y_2), (x_3, y_3)$  를 지난다는 것을 의미한다.

따라서  $y_1y = 2p(x + x_1)$  는 두 점  $A, B$  를 지나는 직선의 방정식이다. <증명 끝>

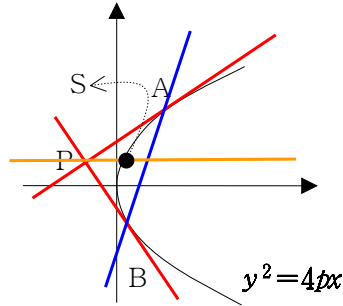
\* 참고 \*

원  $x^2 + y^2 = r^2$  밖의 한 점  $P(x_1, y_1)$  에서 두 접선을 그을 때, 두 접점  $A, B$  를 지나는 직선의 방정식(극선의 방정식)은  $x_1x + y_1y = r^2$  이다.

(극선의 방정식은 이차곡선 위의 점에서 접선의 방정식과 아주 유사하므로 주의할 것)

## (7) 포물선의 기하학적 특성 7

기울기가 같은 직선에 의해 잘린 포물선위의 두 점의 중점은 축에 평행한 직선(의 일부)이다.



(증명)

포물선  $y^2 = 4px$  ( $p > 0$ ) 와  $y = mx + n$  ( $m$ 은 일정) 이 서로 다른 두 점  $A, B$  에서 만나고  $A, B$  의 좌표를 각각  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  라 하자.

$y^2 = 4px$  와  $y = mx + n$  를 연립하여 풀면  $my^2 - 4py + 4pn = 0$

근과 계수의 관계에 의해  $y_1 + y_2 = \frac{4p}{m}$  이고,  $y = mx + n$  에 대입하면  $x_1 + x_2 = \frac{4p - 2mn}{m^2}$  이다.

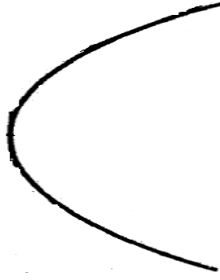
따라서 두 점의 중점의 좌표를  $P$  라 하면  $P(\frac{2p - mn}{m^2}, \frac{2p}{m})$  이고,  $y = \frac{2p}{m}$  이므로 점  $P$  의 자

취는  $n$  값에 관계없이  $x$  축에 평행한 직선이 된다. 단,  $y^2 = 4px$  와  $y = mx + n$  이 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로  $y = \frac{2p}{m}$  와  $y^2 = 4px$  를 연립하여 구하면  $x$  의 범위는  $x > \frac{p}{m^2}$  이다.

따라서 구하는 자취는  $y = \frac{2p}{m}$  ( $x > \frac{p}{m^2}$ ) 으로 직선의 일부가 된다. <증명 끝>

## (8) 포물선의 기하학적 특성 8

눈금 없는 자와 컴퍼스를 가지고 있을 때, 아래 그림과 같이 주어진 포물선에서 포물선의 꼭지점, 초점, 그리고 준선을 작도할 수 있다.



## ① 포물선의 꼭지점

위의 ‘포물선의 기하학적 특성 7’ “기울기가 같은 직선에 의해 잘린 포물선위의 두 점의 중점은 축에 평행한 직선(의 일부)이다.”를 이용하면 임의의 평행한 두 직선의 중점을 연결하여 축과 평행한 직선을 구할 수 있다.

이 직선과 포물선의 교점  $A$  에서 수선을 그으면 포물선과 만나는 또다른 교점  $B$  을 구할 수 있는데,  $AB$  의 수직이등분선이 포물선의 축이 된다.

마지막으로 포물선의 축과 포물선의 교점을 구하면 그 점이 포물선의 꼭지점이다.

## ② 초점

포물선 위의 한 점  $P(x_1, y_1)$  에서 축에 수선을 그어 축과의 교점을  $H(x_1, 0)$  이라 하고, 포물선의 꼭지점  $O$  에서 점  $H$  의 반대편에  $OH = OQ$  가 되도록  $Q(-x_1, 0)$  를 잡으면 직선  $PQ$  는 포물선의 접선이 된다. (‘포물선의 기하학적 특성 1’ “축에 평행하게 입사한 빛은 포물선 위의 한 점에서 반사하여 초점을 향해 진행한다.” 참조)

따라서  $PQ$  의 수직이등분선을 그어 축과의 교점을 구하면 그 점이 바로 포물선의 초점이다.

## ③ 준선

포물선의 꼭지점에서 초점에 이르는 거리와 준선에 이르는 거리가 같으므로, 꼭지점에서 초점의 반대편에 거리가 같게 하여 수선을 그으면 그 직선이 포물선의 준선이다.